$(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$

$(X_n)_{n\geq 0}$ προσαρμ.

$(A_n)_{n\geq 1}$ προβλέψιμη (A_n $\mathcal{F}_{n-1}$-μετρ.)

$$(A\cdot X)_0 = 0$$

$$(A\cdot X)_n = \sum_{k=1}^{n} A_k (X_k - X_{k-1})$$

⋮

(ii) X martingale, A_n φραγμένη τ.μ. $\forall n\geq 1$ $\Big\} \Rightarrow A\cdot X$ mart.

Αποδ

$(A\cdot X)_n$ είναι $\mathcal{F}_n$-μετρ.

$$|(A\cdot X)_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |A_k| (|X_k| + |X_{k-1}|)$$

$$E((A\cdot X)_{n+1} - (A\cdot X)_n \mid \mathcal{F}_n)$$

$$= E(A_{n+1} (X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n)$$

$$= A_{n+1} (E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) - X_n) = 0$$

$(\xi_i)_{i\geq 1}$ ανεξ. ισόνομες $\quad \xi_1 = \begin{cases} 1 & \text{π.θ. } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{'' } \frac{1}{2} \end{cases}$

$$X_n = \xi_1 + \quad + \xi_n$$

$$X_n - X_{n-1} = \xi_n$$

Άσκηση 3.1 $X=(X_n)_{n\geq 0}$ martingale ως προς $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$. $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Ν.δ. ότι η X είναι martingale ως προς $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ $\subset \mathcal{F}$

Λύση

$E|X_n| < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$

X_n είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη

$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}_n$

Έχουμε

$$E(X_{n+1} | \mathcal{G}_n) = X_n$$

$$\Rightarrow E(E(X_{n+1} | \mathcal{G}_n) | \mathcal{F}_n) = E(X_n | \mathcal{F}_n)$$

$$\Rightarrow E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$$

$(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ λέγεται η παραγόμενη διήθηση

3.3, 3.4

Χρόνοι διακοπής

Διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Χρόνο διακοπής λέμε κάθε $T: \Omega \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$

ώστε $\{T \le n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\subset \mathcal{F}$

$\{T \le 10\} \in \mathcal{F}_{10}$

$T_L \qquad \{T_L \le 23\} \in \mathcal{F}_{23}$

Έστω συμμετρικός απλός τυχαίος περίπατος

$(X_i)_{i\ge 1} \qquad S_n = X_1 + \quad + X_n$

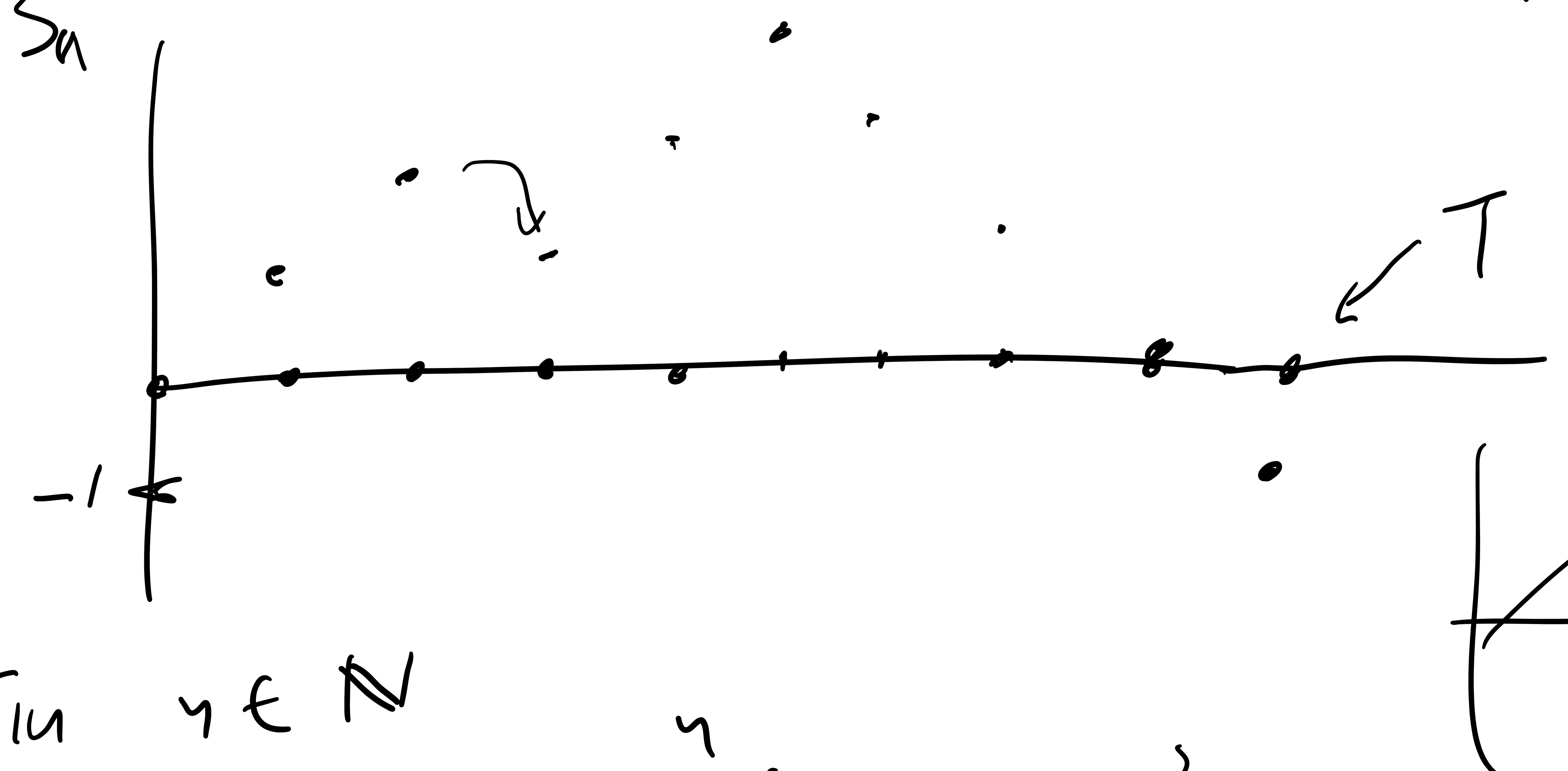
$X_i = \begin{cases} -1 & \text{π.θ. } 1/2 \\ 1 & \text{''} \end{cases} \qquad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \quad , X_n)$

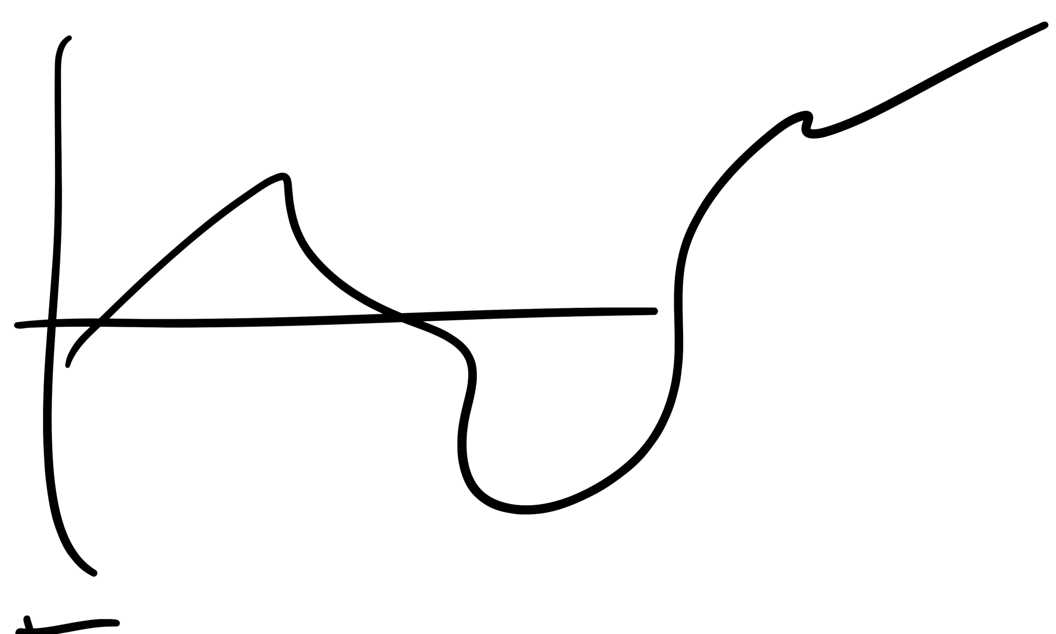
$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

$T = \inf\{k \ge 0 : S_k = -1\}$

$x_1 = x_2 = 1$

$x_3 = -1$





Για $n \in \mathbb{N}$

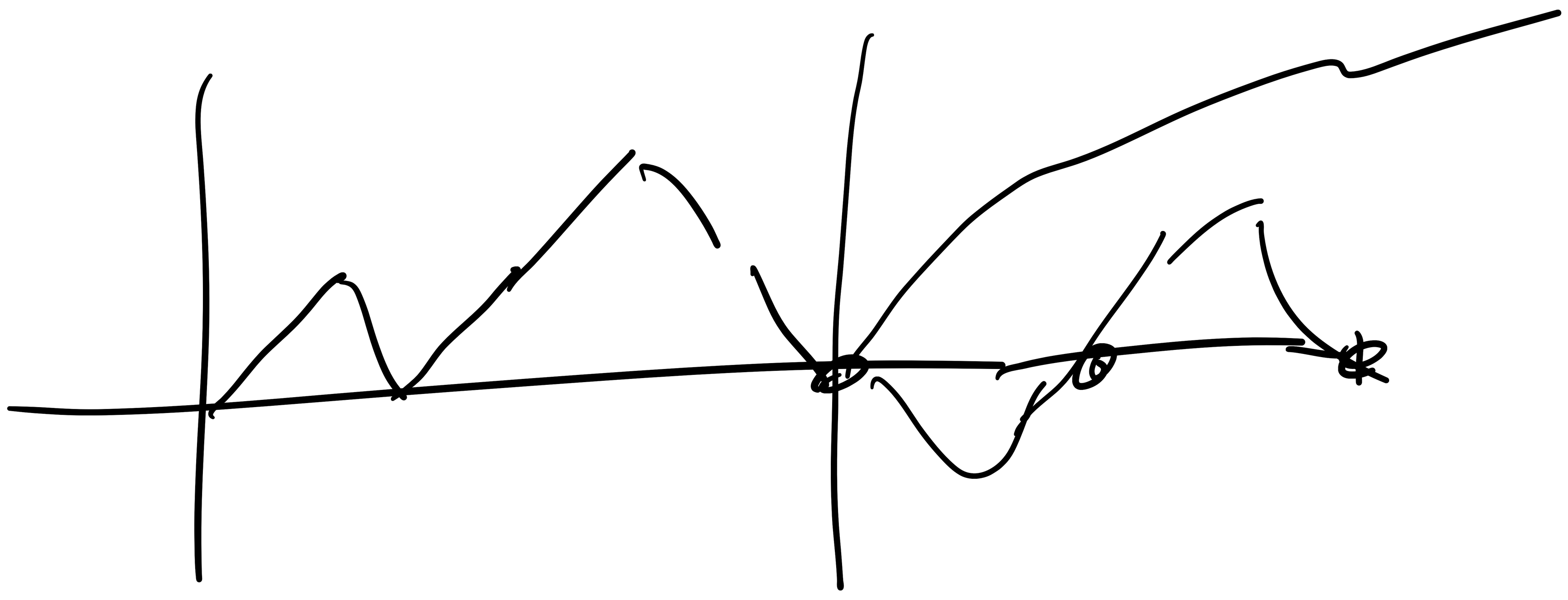
$$\{T \le n\} = \bigcup_{i=0}^{n} \underbrace{\{S_i = -1\}}_{\in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$$

Παράδειγμα $\quad T' = \sup\{k \leq 10 : S_k = 0\}$

δεν είναι χρόνος διακοπής.

π.χ. $\{T' \leq 6\} \notin \mathcal{F}_6$

$X_1, X_2, X_3, \quad , X_6$



Άσκηση 3.6 $\quad T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ χρ. διακοπής

$\Leftrightarrow \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Λύση

$$\Rightarrow \quad \{T = n\} = \underbrace{\{T \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \setminus \underbrace{\{T \leq n-1\}}_{\in \mathcal{F}_{n-1}} \in \mathcal{F}_n$$

$$\Leftarrow \quad \overset{n \in \mathbb{N}}{\{T \leq n\}} = \bigcup_{k=0}^{n} \{T = k\} \in \mathcal{F}_n$$

Άσκηση 3.7 $\quad k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\} \quad T(\omega) = k \quad \forall \omega.$

ν.δ. ότι T είναι χρόνος διακοπής

Λύση

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \{T \leq n\} = \emptyset$ ή $\Omega \in \mathcal{F}_n$

Η σταματημένη στοχ. ανέλιξη

$X = (X_n)_{n \geq 0}$ $\quad T : \Omega \to \mathbb{N}$ χρόνος διακοπής

↑
προσαρμοσμένη

Η σταματημένη στοχ ανέλιξη X^T ορίζεται ως

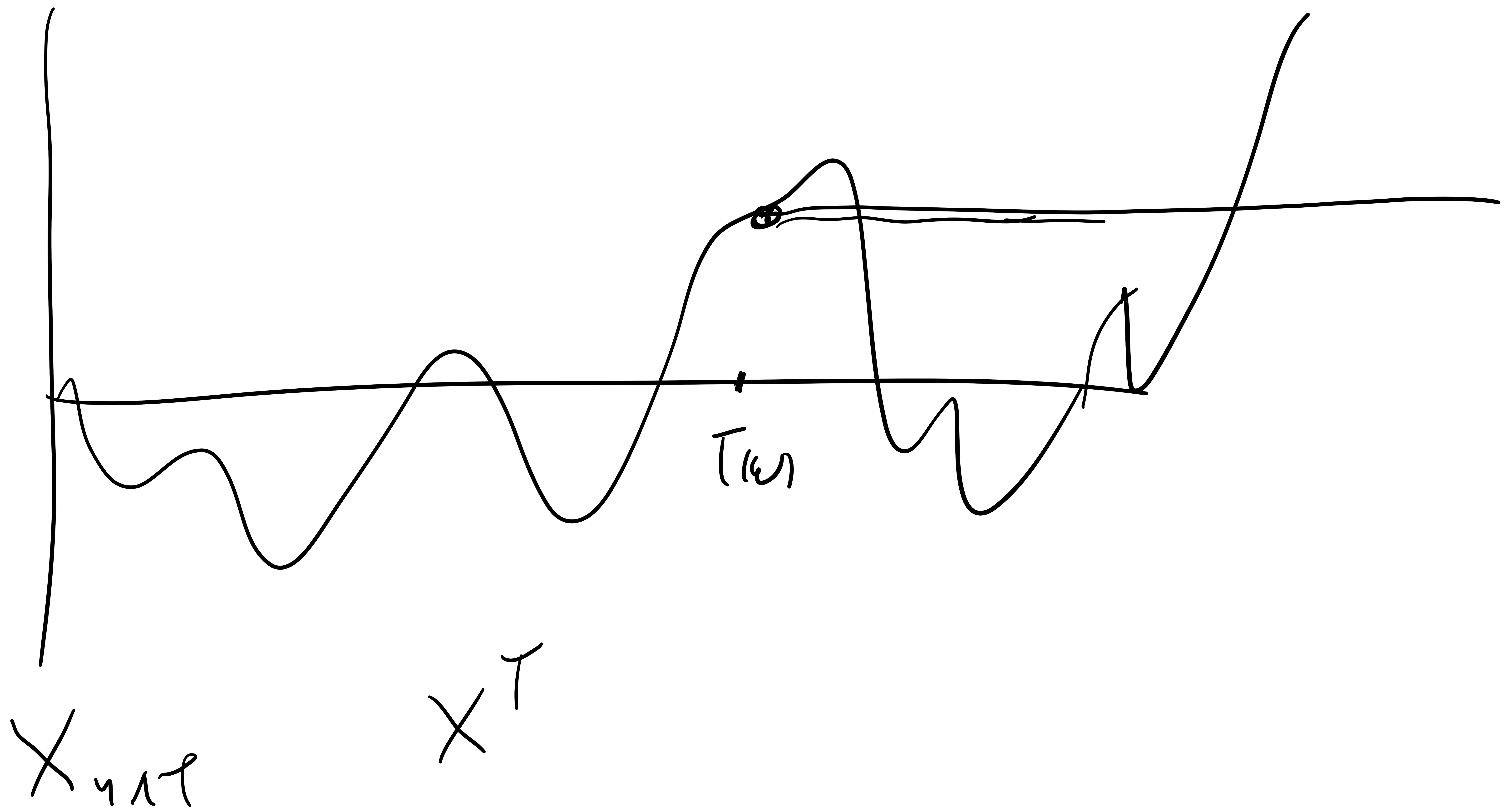
$$(X^T)_n(\omega) = X_{n \wedge T(\omega)}(\omega) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$Y_n = X_{n \wedge T}$$

$\omega \in \Omega$ π.χ. $T(\omega) = 10$

$X \quad X_1(\omega), X_2(\omega), \quad , X_{10}(\omega), X_{11}(\omega)$

$X^T \quad X_1(\omega), X_2(\omega) \quad , X_{10}(\omega), X_{10}(\omega), X_{10}(\omega)$



Πρόταση $\quad T$ χρόνος διακοπής

i) X submartingale $\Rightarrow X^T$ submartingale

ii) X martingale $\Rightarrow X^T$ martingale

Αποδ

Έστω $A_n(\omega) = 1_{n \leq T(\omega)} \quad \forall n = 1, 2, \ldots$

Η $(A_n)_{n \geq 1}$ είναι προβλέψιμος γιατί

$A_n = 1_{n \leq T}$ και $\{n \leq T\} = \Omega \setminus \{T \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$

(i)

$A \cdot X$ submartingale

$$(A \cdot X)_n = \sum_{k=1}^{n} A_k (X_k - X_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 1_{k \leq T} (X_k - X_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n \wedge T} (X_k - X_{k-1})$$

$$= X_{n \wedge T} - X_0$$

$$\longrightarrow X_{n \wedge T} = \underbrace{(A \cdot X)_n}_{Y_n} + X_0 \quad \mathcal{F}_n\text{-μετρ.} \in L^1$$

Θέλουμε

$$E(Y_{n+1} + X_0 \mid \mathcal{F}_n) \geq Y_n + X_0$$

$$E(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq Y_n \quad \text{ισχύει}$$

X super $\Rightarrow -X$ sub $\Rightarrow -X_{n\wedge T}$ sub $\Rightarrow X_{n\wedge T}$ super

---

Άρα αν X martingale και T χρόνος διακοπής

$Z_n = X_{n\wedge T}$ mart. Άρα

$$E(Z_n) = E(Z_0) \Rightarrow E(X_{n\wedge T}) = E(X_0)$$

$$\overset{?}{\Longrightarrow} E(X_T) = E(X_0) \quad (*)$$

$X_{T(\omega)}(\omega)$ $\qquad X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_{10}(\omega),$

$T(\omega)=10$

Η $(*)$ δεν ισχύει πάντοτε

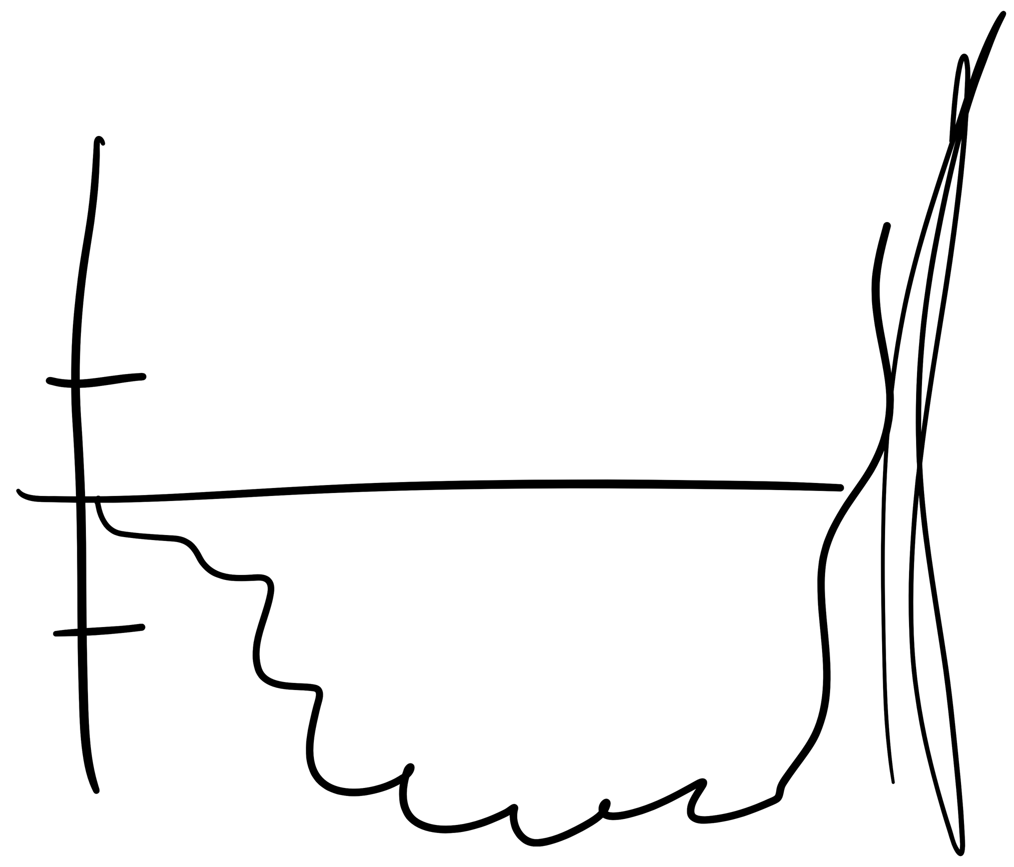
$(S_n)_{n\geq 0}$ ο συμμετρικός απλός τυχ. περ. $\qquad \{-1,1\}^{\mathbb{N}^+}$

S_n είναι martingale

$T(\omega) = \inf\{k \geq 0 : S_k(\omega) = 1\}$ είναι χρόνος διακοπής

ισχύει $\quad E(S_{n\wedge T}) = E(S_0)$

Επίσης $\quad P(T<\infty) = 1$



Η $\quad E(S_T) = E(S_0) \quad$ λέει

$E(1) = E(0)$ λάθος $\qquad S_{T(\omega)}(\omega)$

Πρόταση $T: \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ χρόνος διακοπής

$(X_n)_{n \geq 1}$ Τ.Μ. $(X_n : \Omega \to \mathbb{R})$ $E|X_n| < \infty$

Ισχύει
$$\lim_{n \to \infty} E(X_{n \wedge T}) = E(X_T)$$

αν ισχύει ένα από τα εξής

i) Η T φραγμένη

ii) $P(T < \infty) = 1$, $|X_n| \leq M$ $\forall \omega, \forall n$ $M \in \mathbb{R}$

iii) $E(T), E|X_0| < \infty$ $\exists\, M \in \mathbb{R}$ ώστε
$$|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| \leq M \quad \forall \omega\ \forall n$$

Απόδ.

i) Αν $T \leq n_0$ τότε για $n > n_0$
$$E(X_{n \wedge T}) = E(X_T)$$

ii) Θεώρ. φραγμένης σύγκλισης
$$|X_{n \wedge T}| \leq M$$
$$\lim_{n \to \infty} X_{n \wedge T(\omega)}(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$$
$$\lim_{n \to \infty} E(X_{n \wedge T}) = E(X_T)$$

iii)
$$X_{n \wedge T} - X_0 = \sum_{k=1}^{n \wedge T} (X_k - X_{k-1})$$

$$\Rightarrow |X_{n\wedge T}| \le |X_0| + \sum_{k=1}^{n\wedge T} |X_k - X_{k-1}|$$

$$\le |X_0| + T \cdot M$$

$$E(|X_0| + M \cdot T) < \infty$$

$$ET < \infty \Rightarrow P(T<\infty) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} X_{n\wedge T} = X_T$$

$$\left(T(\omega) = \infty \quad \lim X_{n\wedge T(\omega)}(\omega) = \lim X_n(\omega) \quad ? \right)$$

Θεώρημα (επιλεκτικής διακοπής)

$X = (X_n)_{n\geq 0}$ martingale

T χρόνος διακοπής ώστε να ισχύει

ένα από τα i, ii, iii που πάνω.

Τότε $\quad E(X_0) = E(X_T)$

Σ τον συμμετρικό απλό τυχ. περίπατο. $(S_n)_{n\geq 0}$

$T = \inf\{ n\geq 0 : S_n = 1 \}$

τότε $\quad ET = \infty$

Έστω ότι $\quad ET < \infty$.

Τότε για το martingale S_n έχουμε

$E(S_0) = 0, \qquad |S_n - S_{n-1}| = 1 = M$

Θα πρέπει $\quad E(S_T) = E(S_0)$ δηλ $\quad 1 = 0$

άτοπο

$$E(S_{n \wedge T}) = E(S_0)$$