Άσκηση 3.8 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ διήθηση

S, T χρόνοι διακοπής. Τότε χρόνοι διακοπής είναι και οι $S\wedge T$, $S\vee T$, $S+T$

Λύση $\Omega \to$ χώρος

Για $n \in \mathbb{N}$

i) $\{S\wedge T \leq n\} = \{S\leq n\} \cup \{T\leq n\} \in \mathcal{F}_n$

$\{\omega\in\Omega : S(\omega)\wedge T(\omega)\leq n\}$

ii) $\{S\vee T \leq n\} = \underbrace{\{S\leq n\}}_{\in \mathcal{F}} \cap \underbrace{\{T\leq n\}}_{\in\mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$

iii) $\{S+T\leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \left(\underbrace{\{S=k\}}_{\in\mathcal{F}_k} \cap \underbrace{\{T\leq n-k\}}_{\in\mathcal{F}_{n-k}} \right) \in \mathcal{F}_n$

Δείξτε την 3.4

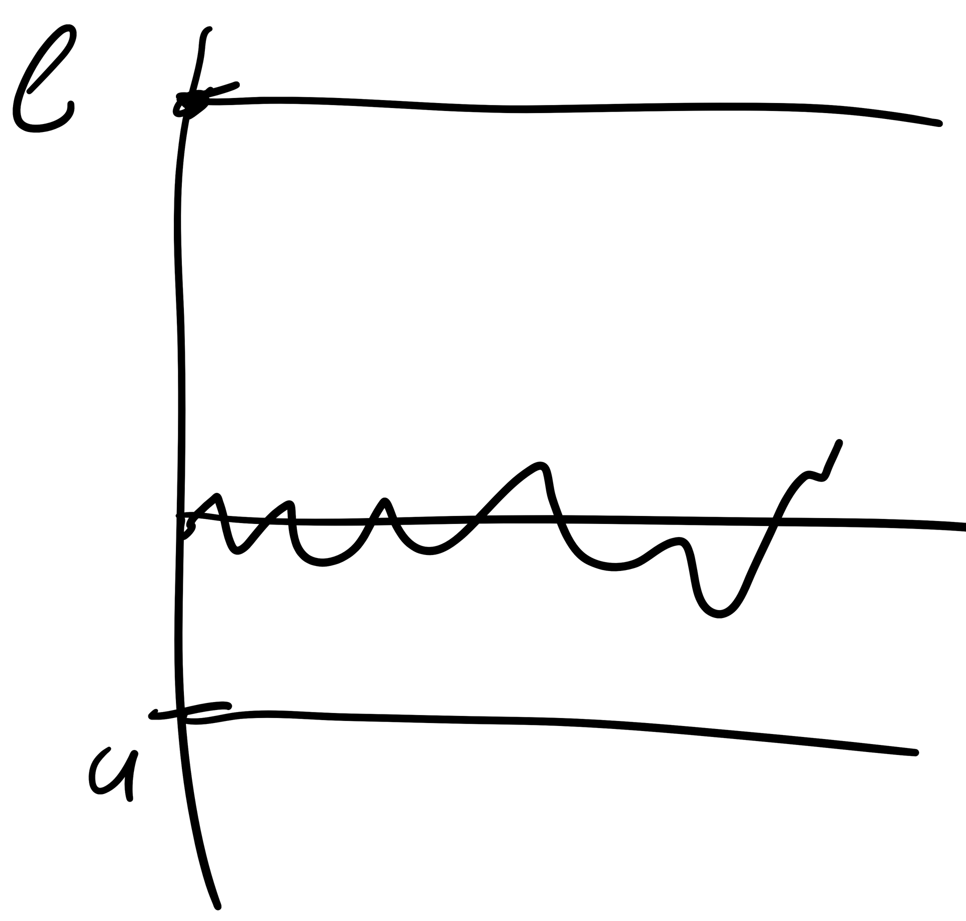
$S_n = X_1 + X_2 + \quad + X_n$ $\quad p > q = 1-p$, $p\in(0,1)$

$P(X_1 = 1) = p$, $P(X_1=-1) = q$ $\quad p > \frac{1}{2}$

$S_n - (p-q)n$, $\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ martingales

Άσκηση 3.10 $T_r = \inf\{k \geq 0 : S_k = r\}$ $r \in \mathbb{Z}$

$\varphi(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$



(α) $a, b \in \mathbb{Z}$ $a < 0 < b$ τότε

$$P(T_a < T_b) = \frac{\varphi(b) - \varphi(0)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$$

Λύση

$T = T_a \wedge T_b$ ∈ χρόνος διακοπής

$P(T < \infty) = 1$ από παρ. 3.18 ή ως εξής

$W_n = S_n - (p-q)n$ martingale $\left(\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)\right)$

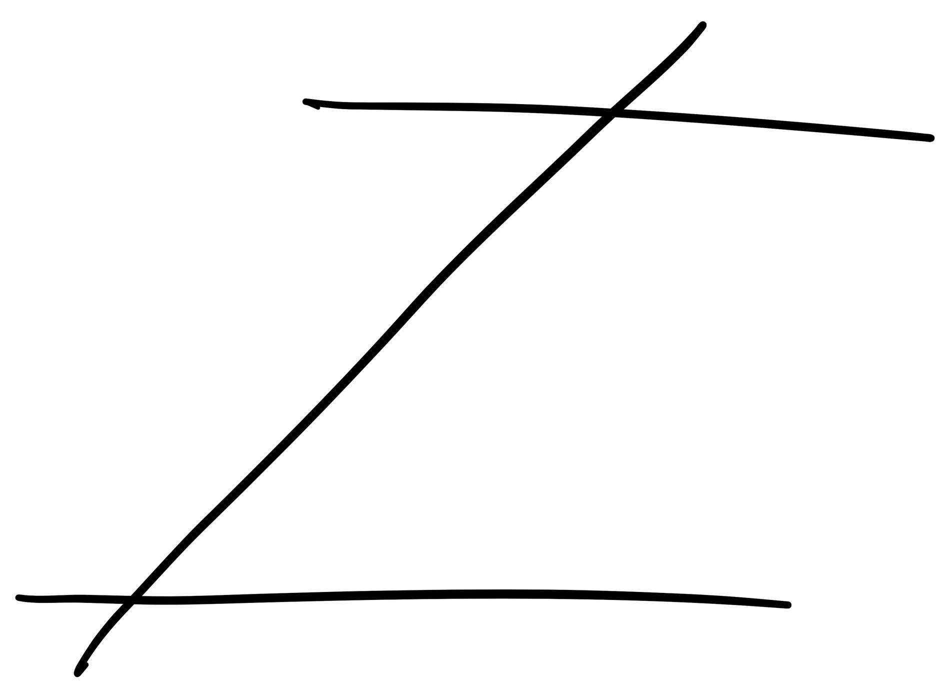
$T \wedge n$ φραγμένος χρόνος διακοπής

$0 = E(W_0) = E(W_{n \wedge T}) \Rightarrow (p-q)E(n \wedge T) = E(S_{n \wedge T})$

$\leq b \Rightarrow (p-q)E(T) \leq b \overset{p>q}{\Rightarrow} E(T) < \infty$

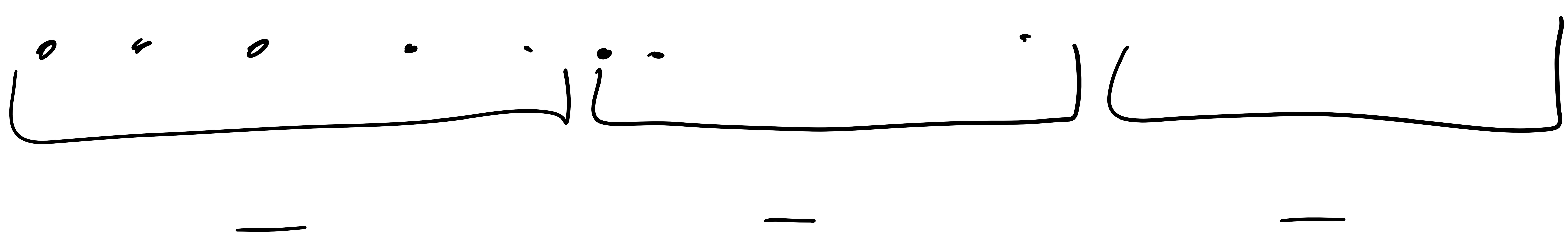
$P(T < \infty) = 1$

$|a| + b$ $\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{|a|+b}$



$p^{|a|+b}$

N



$\varphi(S_n)$ martingale

$\varphi(0) = E(\varphi(S_0)) = E\varphi(S_{n\wedge T})$ $\{T<\infty\} = \{T_a < T_b\} \cup \{T_b < T_a\}$

↑ Θ. επιλ. διακοπής

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(S_{n\wedge T}) = \varphi(a)\, 1_{T_a<T_b} + \varphi(b)\, 1_{T_b<T_a} \quad \text{με π.θ. 1}$$

$$|\varphi(S_{n\wedge T})| \leq \left(\frac{q}{p}\right)^a \quad \forall n$$

$\left(\frac{q}{p}\right)^x$ $\varphi(x) = x$ στην συμμετρική

Θ. Φραγμ. Σύγκλ. $\varphi(0) = \varphi(a)\underline{P(T_a<T_b)} + \varphi(b)\, P(T_b<T_a)$

$(1 - P(T_a<T_b))$

(β) Για $a<0$ ν.δ. ότι

$$P(T_a<\infty) = \frac{1}{\varphi(a)} = \left(\frac{p}{q}\right)^a = \left(\frac{q}{p}\right)^{|a|}$$

λύση

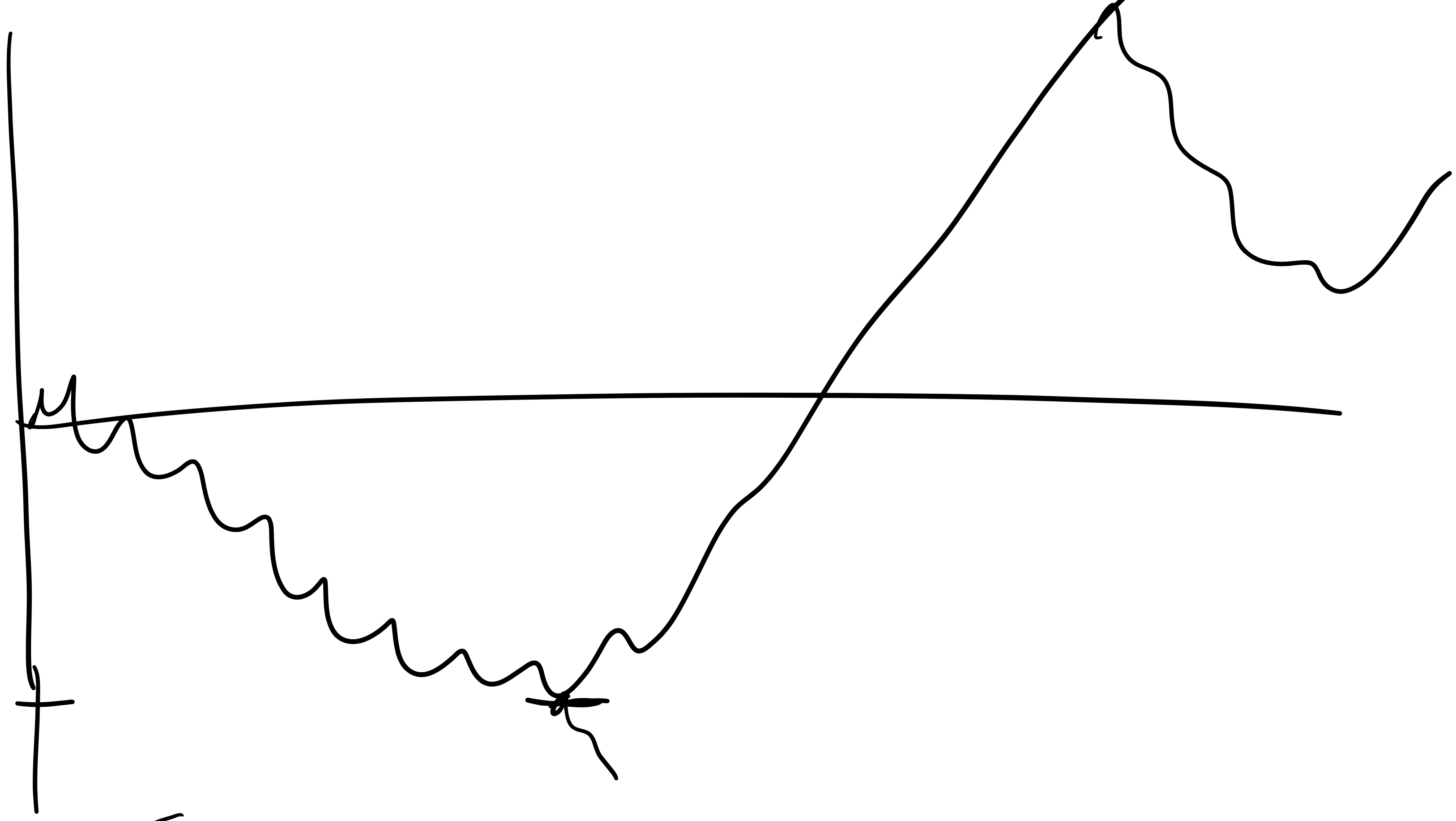
$$\{T_a<\infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{T_a<T_n\}$$

$T_n < T_{n+1}$

$T_n \geq n$ $T_n < k \leq T_k$ $P(T_a \wedge T_n < \infty) = 1$

$$P(T_a<\infty) = \lim_{n\to\infty} P(T_a<T_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)-\varphi(0)}{\varphi(n)-\varphi(a)}$$

$$= \frac{\varphi(0)}{\varphi(a)} = \frac{1}{\varphi(a)}$$



$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = EX_1 = p-q > 0$$

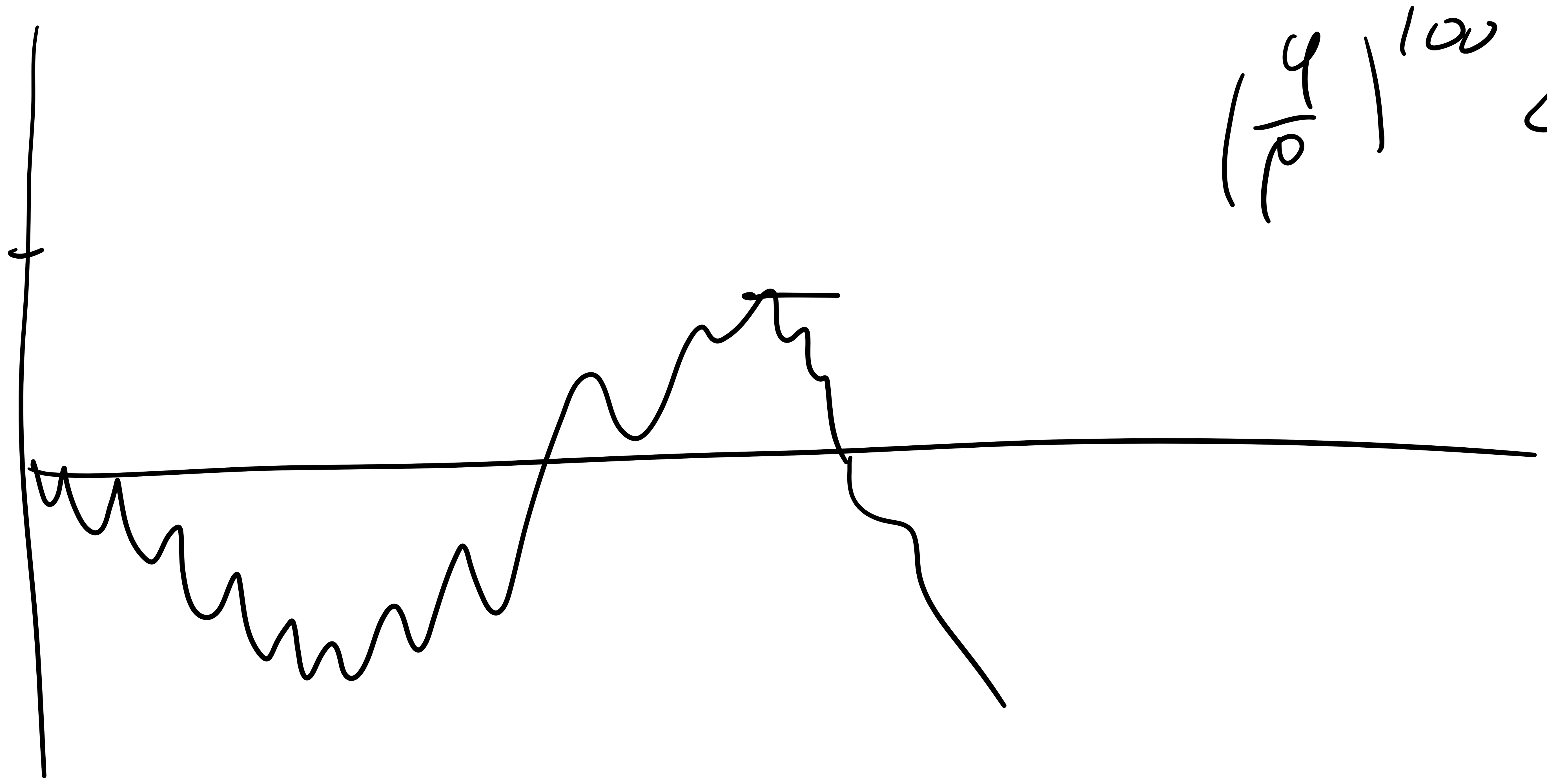
$$M = \min\{ S_i : i \geq 0 \} < 0$$

$|M| \sim$ Γεωμετρική$\left(\frac{q}{p}\right)$

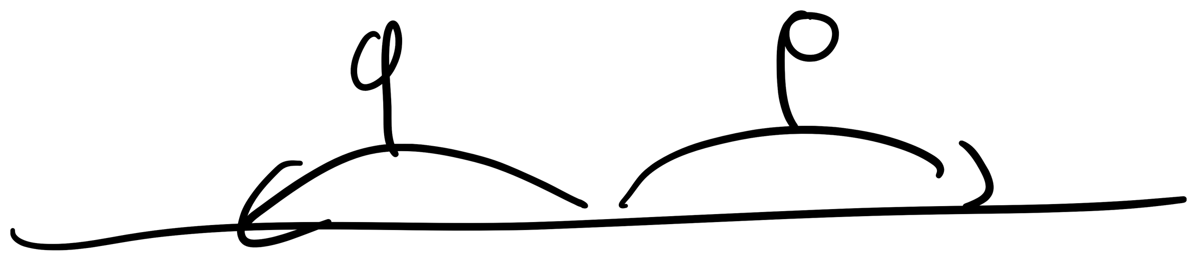
Γεωμ.(p)
$\to P(Y=k) = (1-p)^k p \quad k=0,1,2\ldots$
$\to P(Y \geq k) = (1-p)^k$

$$P(|M| \geq k) =$$

$$P(T_{-k} < \infty) = \frac{1}{\varphi(-k)} = \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{-k}} = \left(\frac{q}{p}\right)^k$$



$$\left(\frac{q}{p}\right)^{100} < 1$$



$p > q$

(γ) Για $b \in \mathbb{N}^+$, $P(T_b < \infty) = 1$

Λύση

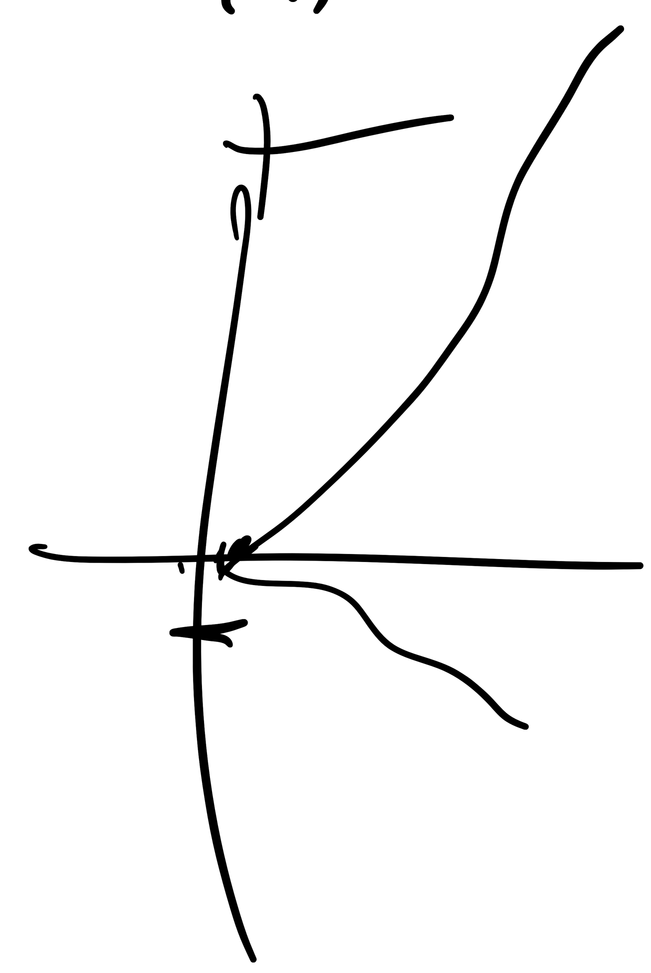
Για κάθε $a < 0 < b$, $a, b \in \mathbb{Z}$

$P(T_a \wedge T_b < \infty) = 1$

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(0)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$$

$$\Rightarrow P(T_b < T_a) = 1 - P(T_a < T_b)$$

$$= \frac{\varphi(0) - \varphi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$$



$$\{T_b < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{T_b < T_{-n}\}$$

$$P(T_b < \infty) = \lim_{n \to \infty} P(T_b < T_{-n}) = \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi(0) - \varphi(-n)}{\varphi(b) - \varphi(-n)} = 1$$

$$\varphi(-n) = \left(\frac{q}{p}\right)^{-n} = \left(\frac{p}{q}\right)^{n} \to \infty$$

(δ) $b \in \mathbb{N}^+$ $\quad E(T_b) = \dfrac{b}{p-q}$

Λύση

$W_n = S_n - (p-q)n$ martingale

Για $a \in \mathbb{Z}$, $a < 0$, $T = T_a \wedge T_b$

$$0 = E(W_0) = E(W_{T \wedge n}) = E(S_{T \wedge n}) - (p-q)\underline{\underline{E(n \wedge T)}}$$

$\Rightarrow (p-q) E T = E(S_T)$

$(p-q) E(T_b \wedge T_a) = a P(T_a < T_b) + b P(T_b < T_a)$

$(T_b \wedge T_{-k})_{k \in \mathbb{N}}$ αύξουσα , $T_{-k} \xrightarrow{k \to \infty} \infty$

$$a P(T_a < T_b) = a \frac{\varphi(b) - \varphi(0)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \xrightarrow{a \to -\infty} 0$$

$\left(\frac{q}{p}\right)^a = \left(\frac{p}{q}\right)^{|a|}$

$\lim_{a \to -\infty} P(T_b < T_a) = 1$

$\cdots \Rightarrow (p-q) E(T_b) = b$

3.15 , 3.16

K

Ανελίξεις

$(S, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος

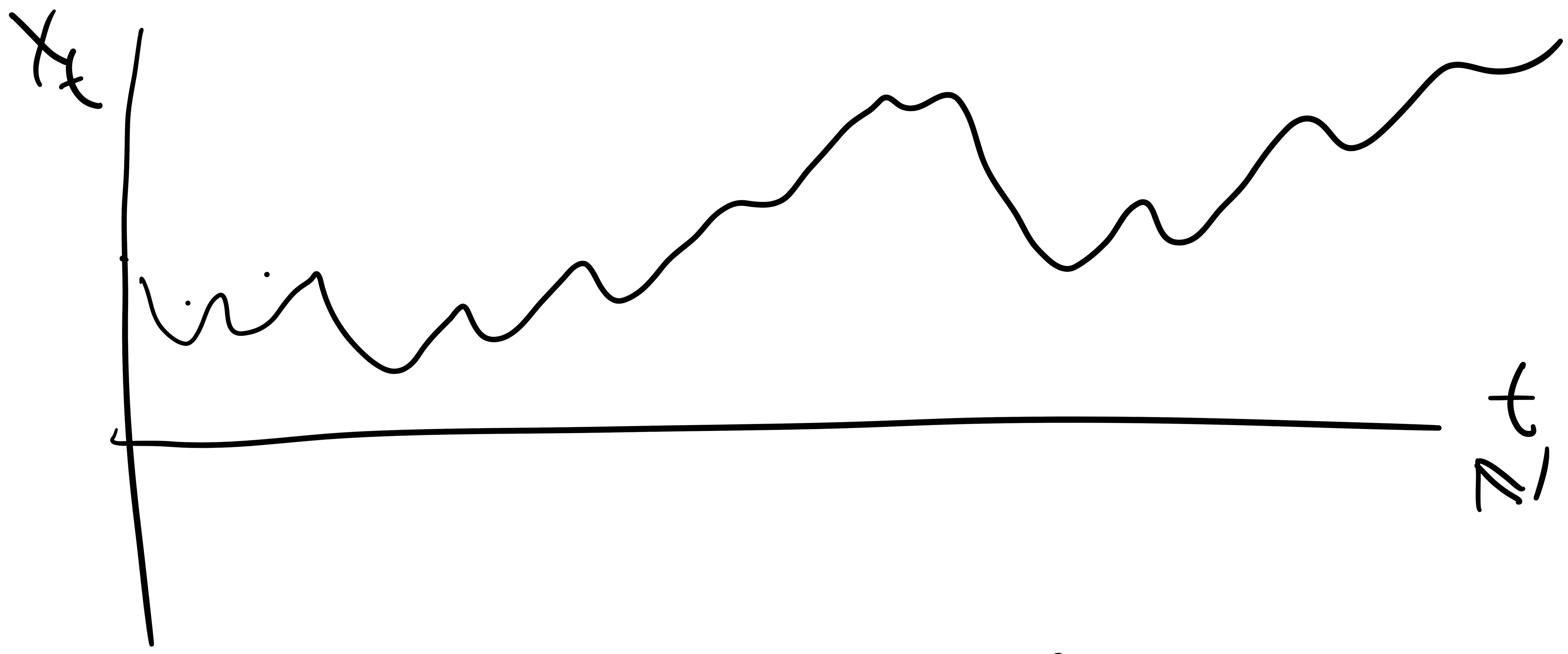
Ανέλιξη με τιμές στον S λέμε κάθε οικογένεια

$\{X_t : t \in I\}$ τ.μ. $\quad X_t : \Omega \to S \quad \forall t \in I$

Συνήθως $\quad I = \mathbb{N}$ ή $[0, \infty)$

$\uparrow$ σε διακριτό χρόνο $\qquad \uparrow$ σε συνεχή χρόνο

π.χ. $\quad X_n$ = αριθμός πελατών την n-οστή μέρα



μονοπάτι της ανέλιξης

$I \ni t \mapsto X_t(\omega) \qquad \omega$ δεδομένο

Τρόποι να δούμε μια ανέλιξη

i) $(X_t)_{t \in I}$ σύνολο τ.μ.

ii) $\tilde{X} : I \times \Omega \to S \qquad X_t(\omega) \equiv X(t, \omega)$

$\tilde{X}(t, \omega) = X_t(\omega)$

iii) $\hat{X} : \Omega \to S^I \qquad \hat{X}(\omega) = (t \mapsto X_t(\omega))$

ο S^I έχει τη σ-άλγεβρα $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}$

$\prod_{i\in I} A_i$ όπου $A_i \in \mathcal{A}$ $\forall i \in I$ και

$\{ i \in I : A_i = S \}$

$$X = (X_t)_{t\in I}$$

<u>Κατανομή της ανέλιξης</u> λέμε την κατανομή της $\hat{X}$.

Δηλ. $P^X(A) = P(\hat{X} \in A)$ $\quad \forall A \in \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}$

<u>Κατανομές πεπερασμένης διάστασης</u> της X λέμε τις κατανομές διανυσμάτων της μορφής $\underbrace{(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})}_{\mathbb{R}^k}$ με $t_1, \dots, t_k \in I$ διαφορετικά.

<u>Ισοδυναμία ανελίξεων</u>

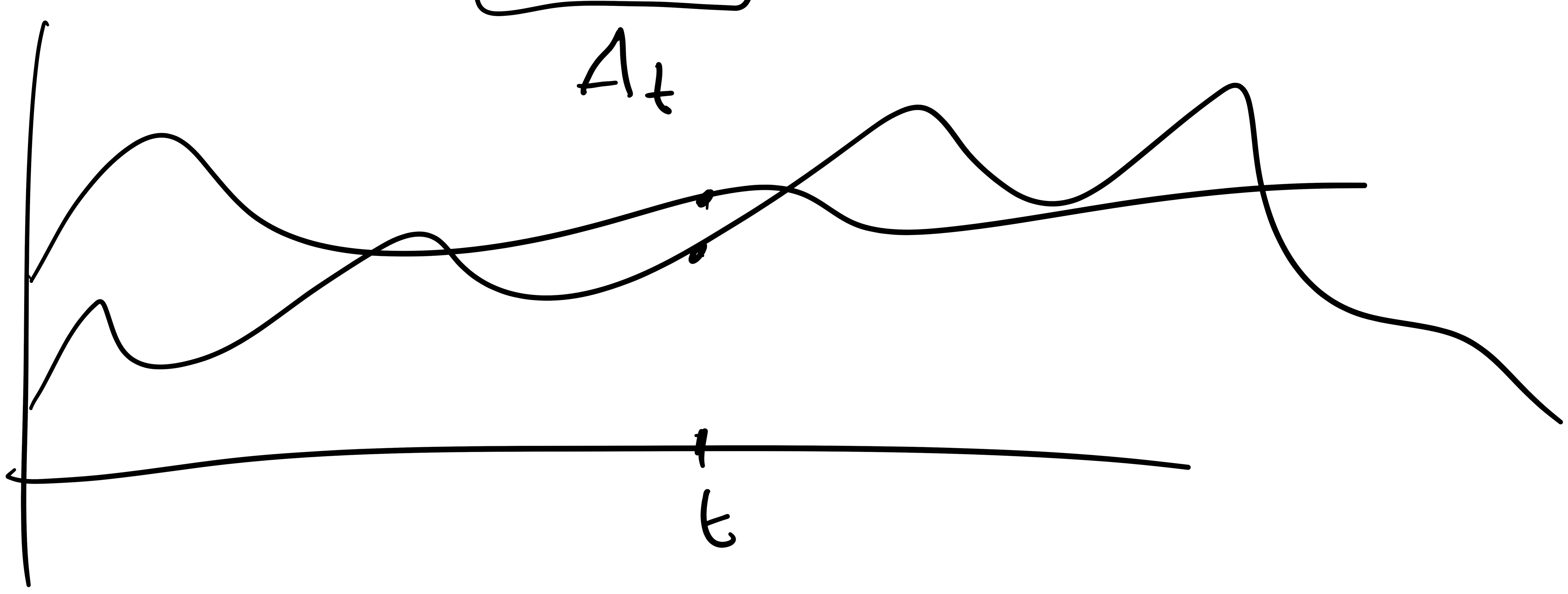
$X = (X_t)_{t\in I}$, $Y = (Y_t)_{t\in I}$ ανελίξεις

(α) Η X λέγεται τροποποίηση της Y αν $\forall t \in I$ ισχύει

$$P(\underbrace{X_t = Y_t}_{A_t}) = 1$$

$X_t(\omega)$

$Y_t(\omega)$



(β) οι X, Y λέγονται <u>μη διακρίσιμες</u> αν

$$P(X_t = Y_t \quad \forall t \in I) = 1$$

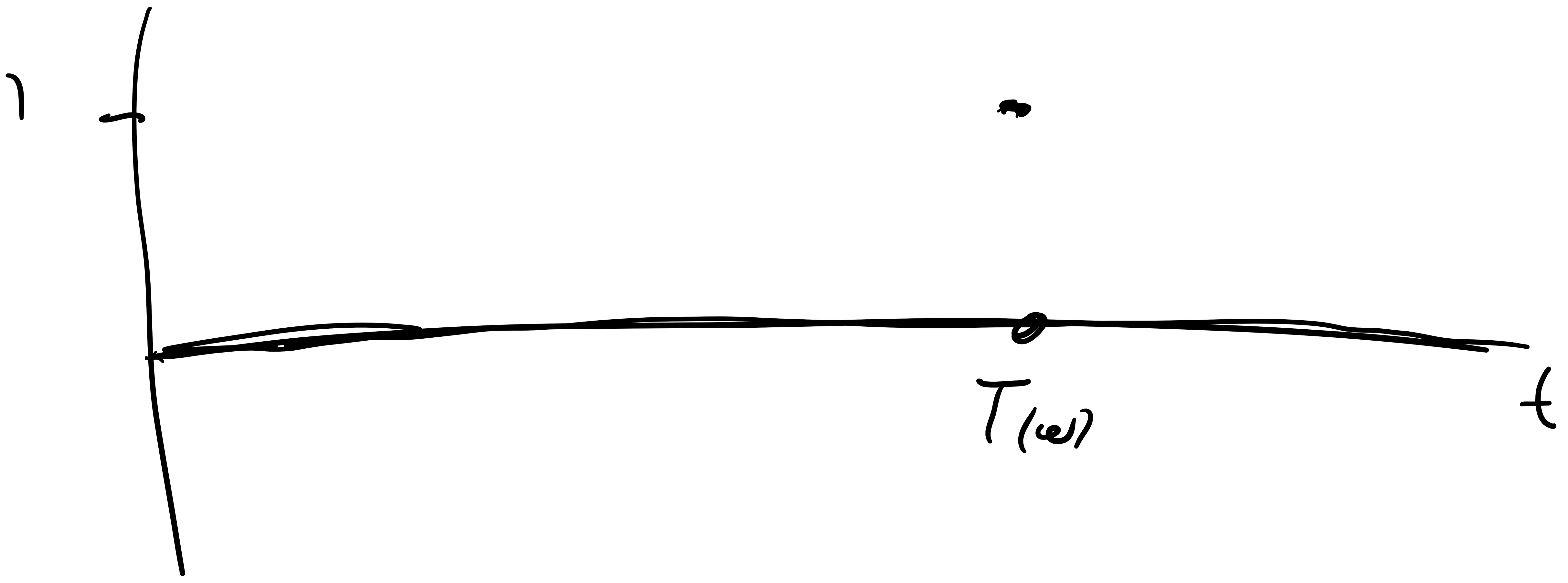
$$\bigcap_{t \in I} A_t$$

μη διακρίσιμες $\Longrightarrow$ X τροποποίηση της Y.

<u>Παράδειγμα</u> $T : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. $T \sim exp(1)$

$X = (X_t)_{t \geq 0}$ $\quad X_t(\omega) = 0$ $\quad \forall \omega \in \Omega$, $\forall t \in [0, \infty) = I$

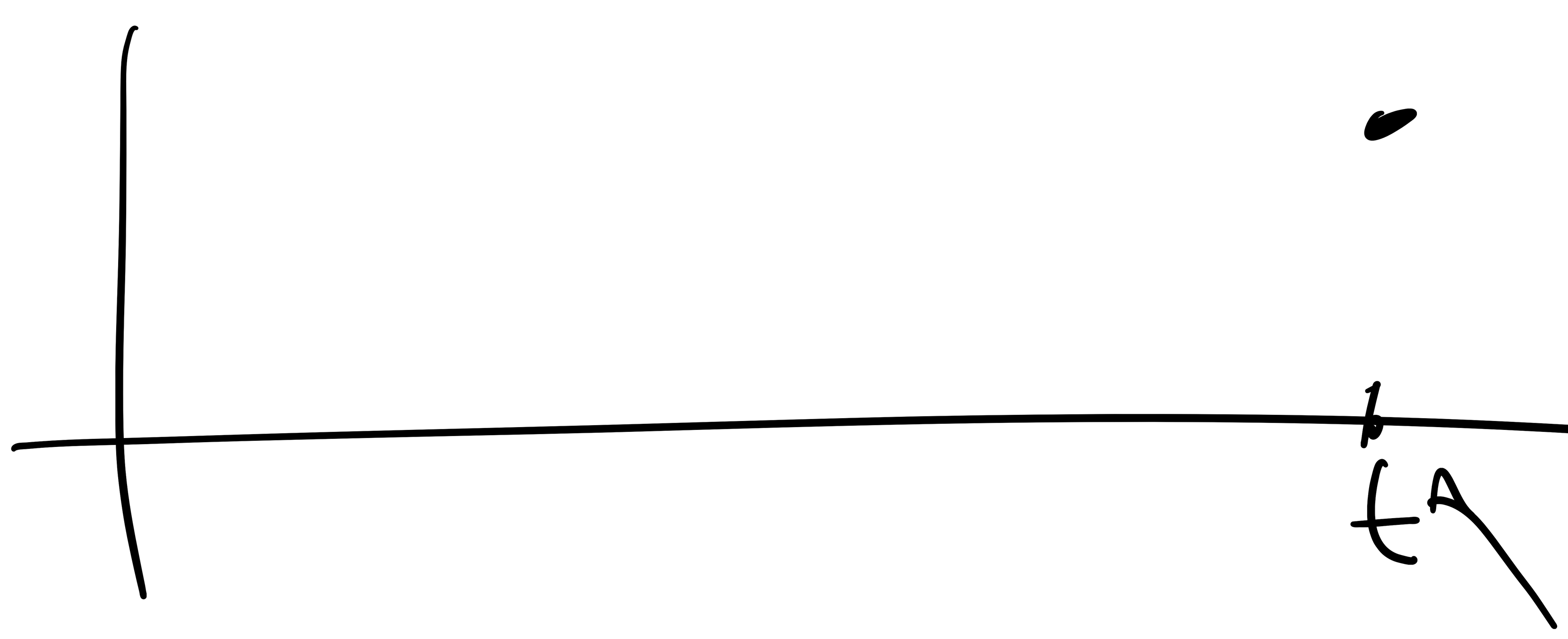
$Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ $\quad Y_t(\omega) = 1_{t = T(\omega)}$



- X είναι τροποποίηση της Y γιατί για $t \geq 0$

$$P(X_t \neq Y_t) = P(Y_t \neq 0) = P(T = t) = 0$$

$\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)$ $\qquad 1_{T(\omega) = t}$



- X, Y δεν είναι μη διακρίσιμες

γιατί $P(X_t = Y_t \quad \forall t \in [0, \infty)) = 0$