(1) $P(X_t = Y_t) = 1 \quad \forall t \in I$

$$\{X \neq Y\} = \bigcup_{U_n \cap U_m = \phi} \{X \in U_n\} \cap \{Y \in U_m\}$$

$$(S, \mathcal{A})$$

(2) $P(X_t = Y_t \quad \forall t \in I) = 1$

(2) $\Rightarrow$ (1)

<u>Πρόταση</u> $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα

S μετρικός χώρος,

$X, Y : I \times \Omega \to S$

X, Y τροποποίηση η μια της άλλης και με π.θ. 1 έχουν συνεχή μονοπάτια. Τότε οι X, Y είναι μη διακρίσιμες.

Απόδ.

$\underline{\Omega}_1, \underline{\Omega}_2 \subset \underline{\Omega}$ με $P(\underline{\Omega}_1) = P(\underline{\Omega}_2) = 1$

και $\forall \omega \in \underline{\Omega}_1$ η $(t \longmapsto X(t,\omega))$

συνεχής

$\forall \omega \in \underline{\Omega}_2$ η $(t \longmapsto Y(t,\omega))$

συνεχής

$$A_t := \{\omega \in \underline{\Omega} : X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}$$

τότε το

$$\underline{\Omega}_1 \cap \underline{\Omega}_2 \cap \Big(\bigcap_{\substack{t \in \mathbb{Q} \\ t \in I}} A_t\Big) \subset \{\omega \in \underline{\Omega} : X_t(\omega) = Y_t(\omega) \ \forall t \in I\}$$

έχει πιθανότητα 1

$\underline{\Omega} \to S^I$

$\hat{X}(\omega) = (t \longmapsto X(t,\omega))$

$P(\hat{X} = \hat{Y}) = 1$

Ανελίξεις με ίδια κατανομή

$X : I \times \underline{\Omega} \to S$ $\quad (S, \mathcal{A})$

$Y : I \times \tilde{\underline{\Omega}} \to S$

__Ορισμός__ Λέμε ότι

i) οι X, Y έχουν την <u>ίδια κατανομή</u> αν

$$P^X = P^Y$$

$$\left(P^X(A) = P(X \in A) \quad \forall A \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}, \quad A \subset S^I \right)$$

ii) οι X, Y έχουν τις <u>ίδιες κατανομές</u> <u>πεπερ. διάστασης</u> αν $\forall n \in \mathbb{N}$ και $t_1, \ldots, t_n \in I$ διαφορετικά

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$$

S^n

__Άσκηση__ Αν ισχύει το i, τότε ισχύει και το ii.

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $t_1, \ldots, t_n \in I$ ίσως. Η σ-αλγ. στο S^n είναι η $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$

$$\mathcal{C} = \{ A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathcal{A} \ \forall i \}$$

Θέλουμε   "   ⟶

$$P((X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in B) = P((Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n}) \in B) \quad (*)$$

$\forall B \in \sigma(\mathcal{C})$. Αρκεί για $B \in \mathcal{C}$.

Έστω $B = A_1 \times \cdots \times A_n$

Θέλουμε $A = \prod_{i \in I} T_i \xrightarrow{\text{με}} \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}$

$$T_i = \begin{cases} S & \text{αν } i \in I \setminus \{i_1, \ldots, i_n\} \\ A_r & \text{αν } i = i_r \end{cases}$$

$$\begin{matrix} t_1 < t_2 & \cdots & < t_n & \\ S \times S \times S & & & \\ A_1 \times A_2 & \cdots & \times A_{t_n} & \times S \times S \times S \end{matrix}$$

Τότε

$$P^X(A) = P^Y(A) \iff$$

$$P(X_i \in T_i \ \forall i \in I) = P(Y_i \in T_i \ \forall i \in I)$$

$$\iff P(X_{i_r} \in A_r \ r = 1 \ldots n) = P(Y_{i_r} \in A_r \ \forall r = 1 \ldots n)$$

Το αντίστροφο;

Υποθέτουμε $X : I \times \Omega \to S$

$Y : I \times \tilde{\Omega} \to S$

S διαχωρίσιμος μετρικός χώρος

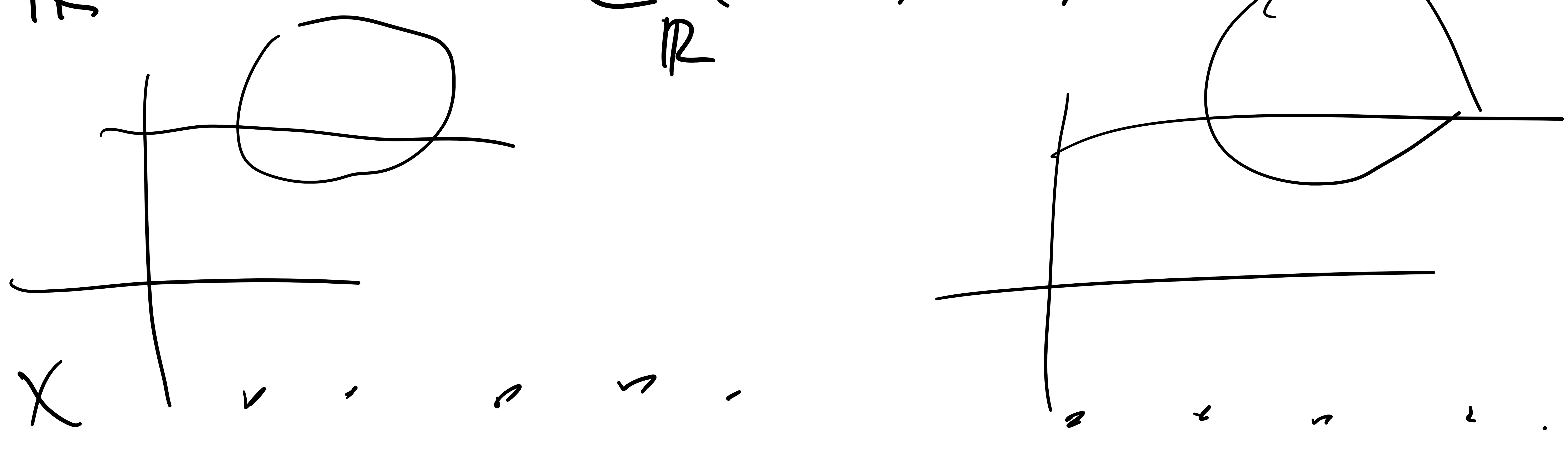
$\mathcal{A} = \mathcal{B}(S)$, $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα

<u>Θεώρημα</u> Αν οι X, Y παίρνουν τιμές στο $C_S(I)$ και έχουν ίσες κατανομές πεπερασμένης διάστασης, τότε $P^X = P^Y$

$S = \mathbb{R}$ $\quad I = [0, \infty)$

$\mathbb{R}^n$ $\quad (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$

$\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ $\quad C_{\mathbb{R}}([0,\infty))$



$Z \sim N(0,1)$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^+$

- $X = (X_1, \ldots, X_d)^t$ λέγεται <u>d-διάστατη τυπική κανονική</u> αν $X_1, \ldots, X_d$ ανεξάρτητες και $X_i \sim N(0,1)$ $\forall i$

- $X = (X_1, \ldots, X_d)^t$ λέγεται Γκαουσιανή αν γράφεται ως

$$\underset{d\times m}{A}\ \underset{m\times 1}{Y}$$
$$X = AY + b$$

με $b \in \mathbb{R}^d$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)^t$ είναι m-διάστατη τυπική κανονική

$A \in \mathbb{R}^{d\times m}$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}^+$

$X: \Omega \to \mathbb{R}^d$ τ.μ.

$$\varphi_X(u) = E\left(e^{i\langle u, X\rangle}\right) \quad \forall u \in \mathbb{R}^d$$
$$= E\left(e^{i u^t X}\right)$$

χαρακτ. συνάρτηση της X.

Άσκηση X Γκαουσιανή στην που λήψω. Ν.δ. ότι

$$\varphi_X(u) = e^{i\langle u, b\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Cu\rangle}$$

$\forall u \in \mathbb{R}^d$, $C = AA^t$

Λύση

$$X = AY + b$$

$$X_j = \sum_{k=1}^{m} a_{j,k} Y_k + b_j \quad j = 1..d$$

$$\varphi_X(u) = E\left(e^{i\langle u, X\rangle}\right)$$

$$\langle u, X\rangle = \sum_{j=1}^{d} u_j \left(\sum_{k=1}^{m} a_{jk} Y_k + b_j \right)$$

$$= \langle u, b\rangle + \sum_{k=1}^{m} Y_k \left(\sum_{j=1}^{d} u_j a_{jk} \right)$$

$$\varphi_X(u) = e^{i\langle u, b\rangle} \prod_{k=1}^{m} \varphi_{Y_k} \left(\sum_{j=1}^{d} u_j a_{j,k} \right)$$

$$= e^{i\langle u, b\rangle} \, e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{d} u_j a_{j,k} \right)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j_1, j_2}^{d} u_{j_1} a_{j_1,k} u_{j_2} a_{j_2,k}$$

$$= \sum_{j_1=1}^{d} u_{j_1} \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{d} \underbrace{a_{j_1,k} a_{j_2 k}}_{AA^t} u_{j_2} \right)$$

$$\sum_{j_2=1}^{d} u_{j_2} \sum_{k=1}^{m} a_{j_1 k} (A^t)_{k j_2}$$

$$= \sum_{j_2=1}^{d} u_{j_2} (AA^t)_{j_1 j_2} = (AA^t u)_{j_1}$$

Άρα $\underline{\varphi_X(u) = e^{i\langle u, b\rangle - \frac{1}{2}\langle u, \underset{C}{\underset{\shortparallel}{AA^t}} u\rangle}}$

Αν X Γκαουσιανή τότε

$$X_j \sim N\left(b_j, \sum_{k=1}^{m} a_{j,k}^2\right)$$

Για $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, d\}$

$$\operatorname{cov}(X_{j_1}, X_{j_2}) =$$

$$\operatorname{cov}\left(\cancel{b_{j_1}} + \sum_{k=1}^{m} a_{j_1,k} Y_k, \cancel{b_{j_2}} + \sum_{k=1}^{m} a_{j_2,k} Y_k\right)$$

$$= \sum_{k=1} a_{j_1,k}\, a_{j_2,k} = (AA^t)_{j_1, j_2}$$

$$= C_{j_1, j_2}$$

$X=(X_1, \dots, X_d)^t$ Γκαουσιανή

<u>Πόρισμα</u> Αν $Cov(X_i, X_j) = 0$ $\forall i \neq j$

τότε $\{X_1, \dots, X_d\}$ είναι ανεξάρτητες

Απόδ.

Θα έχουμε C διαγώνιο με διαγώνια στοιχεία $c_j \geq 0$ $j=1,\dots,d$

$c_j = Var(X_j)$

$$\varphi_X(u) = e^{i\langle u,b\rangle - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} u_j^2 c_j} \quad (*)$$

Έστω $Z_1, \dots, Z_d \sim N(0,1)$

ανεξάρτητες ισόνομες

$$T_j = b_j + \sqrt{c_j}\, Z_j \qquad j=1,\dots,d$$

Η $T = (T_1, \dots, T_d)^t$ έχει

χαρακτ. συνάρτηση την

$$\left(E\left(e^{i\sum_{j=1}^{d} u_j T_j}\right) = \dots \right)$$

$$\ldots \quad X \stackrel{d}{=} T$$

$$P(T_1 \in A_1 \quad , T_d \in A_d) =$$

$$P((T_1 \quad , T_d) \in A_1 \times \quad \times A_d)$$

$$= P((X_1 \quad , X_d) \in A_1 \times \quad \times A_d)$$

$$P(T_1 \in A_1) \quad P(T_d \in A_d) =$$

$$= P(X_1 \in A_1) \quad P(X_d \in A_d)$$

X, Y ανεξ $\Rightarrow$ ασυσχ.

$\not\Leftarrow$

(X, Y) $\nexists$ κανονικό

(X, IX)

$$I = \begin{cases} -1 & \text{π.θ.} - 1/2 \\ 1 & \text{"} \quad 1/2 \end{cases}$$

$(X_1, \quad , X_d)$

$\underline{cov(X_i, X_s)} = 0 \Rightarrow X_i \perp\!\!\!\perp X_s$

Παρατήρηση: Αν $X = (X_1, \quad , X_d)^t$ Γκαουσιανή τ.μ. $1 \leq r < d$, και $i_1, i_2, \quad , i_r \in \{1, 2, \quad , d\}$ r διαφορετικοί δείκτες, τότε και η $\tilde{X} = (X_{i_1}, X_{i_2}, \quad , X_{i_r})^t$ είναι Γκαουσιανή τ.μ.

Αποδ.

Αν $X = A \cdot Y + b$ όπως πιο πάνω

Τότε $X_j = \sum_{k=1}^{m} a_{j,k} Y_k + b_j \quad j = 1 . , d$

Τότε

$X_{j_s} = \sum_{k=1}^{m} a_{j_s,k} Y_k + b_{j_s} \quad s = 1 . , r$

Άρα $\underset{}{\tilde{X}} = \underset{r \times m}{\tilde{A}} \; \underset{m \times 1}{Y} + \tilde{b}$ με

$$(\tilde{A})_{s,k} = a_{j_s,k} \qquad \begin{array}{l} s = 1, \quad , r \\ k = 1, \quad , m \end{array}$$

$$\tilde{b}_s = b_{j_s}$$
