Ασκήσεις Ι

1. Έστω $(X_n)_{1\leqslant k\leqslant n}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}|X_1| < \infty$. Θέτουμε $\mathcal{G} := \sigma(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$. Να δειχθεί ότι

(α) $\mathbf{E}(X_i \,|\, \mathcal{G}) = \mathbf{E}(X_1 \,|\, \mathcal{G})$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. [Ισότητα με πιθανότητα 1, όχι απλώς ισονομία.]

(β)

$$\mathbf{E}(X_1 \,|\, \mathcal{G}) = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

2. Με συμβολισμό όπως στην προηγούμενη άσκηση, έστω $\mathcal{F}_n := \sigma(\{S_i : i \geqslant n\})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό $n \geqslant 2$ ισχύει

$$\mathbf{E}\left(\frac{S_{n-1}}{n-1}\middle|\mathcal{F}_n\right) = \frac{S_n}{n}$$

3. Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ submartingale. Να δειχθεί ότι τα εξής είναι ισοδύναμα.

(α) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}(X_n^+) < \infty$,
(β) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}|X_n| < \infty$,
(γ) $\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{E}|X_n| < \infty$,
(δ) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n^+)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο,
(ε) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}|X_n|$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο.

4. Άσκηση 5.12 από τις σημειώσεις.