Στοχαστικός Λογισμός, 2022
Ασκήσεις II

1. Έστω $(B_s)_{s\geqslant 0}$ μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown. Για κάθε $r \in \mathbb{R}$ θέτουμε $T_r := \inf\{s \geqslant 0 : B_s = r\}$. Έστω $a > 0$ δεδομένο, θέτουμε $T = T_{-a} \wedge T_a$.
(α) Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(e^{-\lambda T}) = \frac{1}{\cosh(a\sqrt{2\lambda})}$$

για κάθε $\lambda > 0$. [Υποδειξη: Για κάθε $r \in \mathbb{R}$, η ανέλιξη $e^{-r^2 t/2}\cosh(rB_t)$ είναι martingale.]
(β) Να δειχθεί ότι η T έχει πυκνότητα

$$f(t) = \frac{\pi}{2a^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\exp\left(-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8a^2}t\right)$$

για κάθε $t > 0$.

[Για την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace, δείτε για παράδειγμα την παράγραφο 8.2 στο «Βασική Μιγαδική Ανάλυση» των Marsden-Hoffman, μετάφραση Λ. Παπαλουκά.]

2. (Γέφυρα Brown. Τέσσερις περιγραφές) Έστω $B = (B_s)_{s\geqslant 0}$ μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown.

(α) Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $X_t = B_t - tB_1, t \in [0,1]$ είναι Γκαουσιανή και να υπολογιστούν η συνάρτηση μέσης τιμής και η συνάρτηση συνδιακύμανσής της (ορισμοί πιο κάτω).

(β) Κάντε το ίδιο για την ανέλιξη

$$Y_t := (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}\,dB_s, t \in [0,1).$$

(γ) Κάντε το ίδιο για την ανέλιξη

$$Z_t := (1-t)B_{t/(1-t)}, t \in [0,1).$$

(δ) Στο (α), δείξτε ότι η B_1 είναι ανεξάρτητη από την ανέλιξη X. Για κάθε $\varepsilon > 0$, θεωρούμε την ανέλιξη $(U^{(\varepsilon)}(t))_{t\in[0,1]}$ με[1]

$$U^{(\varepsilon)} = \big(B|\{|B_1| < \varepsilon\}\big)$$

(στο δεξί μέλος, θεωρούμε τον περιορισμό της B στο $[0,1]$). Να δειχθεί ότι $U^{(\varepsilon)} \Rightarrow X$ καθώς $\varepsilon \to 0^+$ [σύγκλιση κατά κατανομή για τυχαίες μεταβλητές με τιμές στον $C([0,1])$].

(ε) Δείξτε ότι οι $X|[0,1), Y, Z$ έχουν την ίδια κατανομή και έπειτα δείξτε λεπτομερώς πώς αυτό συνεπάγεται το ότι $\mathbf{P}(\lim_{t\to 1^-} Y_t = 0) = 1$. Δείξτε και με άλλο τρόπο ότι $\mathbf{P}(\lim_{t\to 1^-} Z_t = 0) = 1$.

Ορισμός: Μια ανέλιξη $(X_t)_{t\in I}$ [όπου I είναι σύνολο και για κάθε $t \in I$ η $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$] λέγεται Γκαουσιανή αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ και $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ διαφορετικούς δείκτες, το διάνυσμα $(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n})$ είναι Γκαουσιανό.

Η συνάρτηση μέσης τιμής της X είναι η $m : I \to \mathbb{R}$ με $m(i) = \mathbf{E}(X_i)$ για κάθε $i \in I$, και η συνάρτηση συνδιακύμανσης της X είναι η $C : I \times I \to \mathbb{R}$ με $C(i,j) = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ για κάθε $i, j \in I$.

Σχόλια. Ο χαρακτηρισμός του νόμου της X που δίνεται από το (δ) δικαιώνει το όνομα «γέφυρα Brown». Λέει ότι $X = B|\{B_1 = 0\}$, δηλαδή η X είναι το μονοπάτι της κίνησης Brown στο $[0,1]$ με τη δέσμευση τον χρόνο 1 να ξαναγυρίσει στο 0. Επειδή το γεγονός $B_1 = 0$ έχει πιθανότητα 0, δεσμεύσαμε ως προς το $\{|B_1| < \varepsilon\}$ και πήραμε $\varepsilon \to 0$.

Η έκφραση Y στο (β) είναι λύση μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης που έχουμε συναντήσει (άσκηση 14.1 στις σημειώσεις του μαθήματος).

[1] Εδώ η δέσμευση είναι αυτή των στοιχειωδών πιθανοτήτων. Δηλαδή, η κατανομή της $U^{(\varepsilon)}$ ορίζεται ως εξής. Για κάθε $A \subset \mathcal{B}(C([0,1]))$ έχουμε $\mathbf{P}(U^{(\varepsilon)} \in A) := \mathbf{P}(B \in A, |B_1| < \varepsilon)/\mathbf{P}(|B_1| < \varepsilon)$. B ο περιορισμός της κίνησης Brown στο $[0,1]$.