Εθνικο και Καποδιστριακο Πανεπιστημιο Αθηνων

Στοχαστικός Λογισμός

Λυσεις ασκησεων

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών
2020

Περιληψη

Λύνονται ορισμένες από τις ασκήσεις του συγγράμματος «*Εισαγωγή στον Στοχαστικό Λογισμό*» του κ. Δημήτρη Χελιώτη. Οι περισσότερες από τις παρακάτω ασκήσεις λύθηκαν μέσα στο μάθημα κατά το εαρινό εξάμηνο του 2020. Έχει γίνει μία προσπάθεια να παρουσιαστούν εδώ αναλυτικά γραμμένες οι λύσεις. Αναπόφευκτα, ορισμένες από αυτές ενδέχεται να περιέχουν λάθη.

Ανδρέου Πάνος

Αθήνα 2020

Άσκηση 2.3 *Έστω $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ με $X(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Να δειχθεί ότι:*

(α) $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) > 0$ *με πιθανότητα 1.*

(β) $\mathbb{E}\left(\dfrac{X}{\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})}\right) = 1.$

Λύση:

(α) Γνωρίζουμε ότι αν $X(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$, τότε $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \geqslant 0$ με πιθανότητα 1. Θα δείξουμε ότι $\mathbf{P}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = 0) = 0$. Για ευκολία, θέτουμε $Y = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$. Έστω

$$A = \{Y = 0\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = 0\}.$$

Χρησιμοποιούμε τη δεύτερη σχέση του ορισμού της δεσμευμένης μέσης τιμής, δηλαδή ότι $\int_A X\, d\mathbf{P} = \int_A Y\, d\mathbf{P}\ \forall A \in \mathcal{G}$ (είναι ο βασικός τρόπος να περνάμε από την Y στη X), και παίρνουμε ότι

$$\int_A X\, d\mathbf{P} = \int_A Y\, d\mathbf{P} = 0 \overset{X>0}{\Rightarrow} \mathbf{P}(A) = 0,$$

από γνωστή πρόταση της Θεωρίας Μέτρου (Αν $f \geqslant 0$ και $\int f\, d\mu = 0$, τότε $\mu(f > 0) = 0$). Συγκεκριμένα, η πρόταση δίνει $\mathbf{P}(\{\mathbf{1}_A X > 0\}) = 0$, όμως $\{\mathbf{1}_A X > 0\} = A$ επειδή η X παίρνει μόνο θετικές τιμές.

(β) Από τον νόμο των επαναλαμβανόμενων μέσων τιμών, παίρνουμε

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\frac{X}{\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})}\Big|\, \mathcal{G}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})}\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\right) = 1,$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ είναι $\mathcal{G}-$μετρήσιμη, οπότε βγαίνει έξω από τη μέση τιμή. □

Σχόλιο: Για να εφαρμόσουμε τον νόμο των επαναλαμβανόμενων μέσων τιμών στο (β) πιο πάνω, η θεωρία ζητάει να έχουμε $X/\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \in \mathcal{L}^1$, το οποίο δεν γνωρίζουμε. Έχουμε δύο τρόπους δικαιολόγησης.

(α) Επεκτείνοντας τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής[1] για όλες τις τυχαίες μεταβλητές $X \geqslant 0$ (όχι απαραίτητα στοιχεία του $\mathcal{L}^1$). Και τότε ο νόμος των επαναλαμβανόμενων μέσων τιμών επεκτείνεται για αυτές τις X (όπως και σχεδόν όλα τα θεωρήματα που έχουμε αποδείξει), και η χρήση του που κάναμε πιο πάνω νομιμοποιείται.

(β) Παραμένοντας στο πλαίσιο που δουλεύουμε, θέτουμε $Y := X/\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \geqslant 0$. Τότε για $M > 0$ έχουμε

$$\mathbb{E}(Y\mathbf{1}_{Y\leqslant M}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y\mathbf{1}_{Y\leqslant M} \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(\frac{1}{\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})}\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{Y\leqslant M} \mid \mathcal{G})) \leqslant 1.$$

Για $M \to \infty$, και εφαρμόζοντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, παίρνουμε $\mathbb{E}(Y) \leqslant 1$, άρα $Y \in \mathcal{L}^1$, και η λύση που γράψαμε πιο πάνω είναι πλήρως δικαιολογημένη.

[1]Αυτή η ανάπτυξη της θεωρίας δίνεται, για παράδειγμα, στο «A user's guide to measure theoretic probability». David Pollard. Παράγραφος 6 του Κεφαλαίου 5.

Άσκηση 2.7 *Αν οι $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ ικανοποιούν $\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}) = X$ και $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X^2)$, τότε $X = Y$ με πιθανότητα 1.*

Λύση:
Θα δείξουμε ότι $\mathbb{E}\left((X-Y)^2\right) = 0$, οπότε θα έπεται το ζητούμενο. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((X-Y)^2\right) &= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) - 2\,\mathbb{E}(XY) = 2\,\mathbb{E}(X^2) - 2\,\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G})\right) \\ &= 2\,\mathbb{E}(X^2) - 2\,\mathbb{E}\left(X\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})\right) = 2\,\mathbb{E}(X^2) - 2\,\mathbb{E}(X^2) = 0,\end{aligned}$$

όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}) = X$, οπότε η X είναι $\mathcal{G}-$μετρήσιμη. □

Άσκηση 2.12 Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Θέτουμε $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_k := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ για $1 \leqslant k \leqslant n$. Έστω και τυχαίες μεταβλητές $a_1, a_2, \dots, a_n$ ώστε η a_k να είναι $\mathcal{F}_{k-1}$-μετρήσιμη και φραγμένη για $1 \leqslant k \leqslant n$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{k=1}^n a_k X_k\right)^2\right\} = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(a_k^2).$$

Λύση:
Παρατηρούμε ότι

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k X_k\right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 X_k^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j X_i X_j.$$

Έχουμε ότι $\mathbb{E}(X_i) = 0$ και $\mathbb{E}\left(X_i^2\right) = \operatorname{Var}(X_i) + (\mathbb{E}(X_i))^2 = 1$, για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$. Έστω $k \in \{1, \dots, n\}$. Είναι $a_k \perp\!\!\!\perp X_k$, διότι η a_k είναι $\mathcal{F}_{k-1}$-μετρήσιμη και η X_k είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_{k-1}$. Επίσης, $a_k^2 X_k^2 \in L^1$, διότι η a_k είναι φραγμένη και $X_k \in L^2$. Παίρνουμε λοιπόν ότι

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 X_k^2\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left(a_k^2 X_k^2\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left(a_k^2\right)\mathbb{E}\left(X_k^2\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(a_k^2).$$

Για τους υπόλοιπους όρους, παρατηρούμε ότι για $i < j$ ισχύει

$$\mathbb{E}(a_i a_j X_i X_j) = \mathbb{E}(a_i a_j X_i)\,\mathbb{E}(X_j) = 0,$$

διότι $\mathbb{E}(X_j) = 0$ και $X_j \perp\!\!\!\perp a_i a_j X_i$, αφού η $a_i a_j X_i$ είναι $\mathcal{F}_{j-1}$ μετρήσιμη και η X_j είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_{j-1}$. Έπεται ότι

$$\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{k=1}^n a_k X_k\right)^2\right\} = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(a_k^2).$$

□

Σημείωση: Το σύμβολο $\perp\!\!\!\perp$ είναι συχνά χρησιμοποιούμενη συντόμευση του «ανεξάρτητη».

Άσκηση 3.1 *Έστω ότι η $(X_n)_{n\geqslant 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{G}_n)_{n\geqslant 0}$. Ορίζουμε $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0,\dots,X_n)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τότε $\mathcal{F}_n\subset\mathcal{G}_n$, και η $(X_n)_{n\geqslant 0}$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.*

Λύση:
Είναι $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0,\dots,X_n) = \sigma\left(\bigcup_{i=0}^{n}\sigma(X_i)\right)$ η ελάχιστη σ-άλγεβρα που κάνει μετρήσιμες τις $X_0,\dots,X_n$. Αφού για κάθε $n\in\mathbb{N}$ η X_n είναι $\mathcal{G}_n$-μετρήσιμη (η $(X_n)_{n\geqslant 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{G}_n)_{n\geqslant 0}$), έχουμε ότι $\mathcal{F}_n\subset\mathcal{G}_n$. Επίσης, $\mathbb{E}|X_n| < +\infty$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ (ως martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{G}_n)_{n\geqslant 0}$), η $(X_n)_{n\geqslant 0}$ είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ και ισχύει ότι

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_{n+1}\mid\mathcal{G}_n\right)\mid\mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}\left(X_n\mid\mathcal{F}_n\right) = X_n,$$

αφού η X_n είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη και $\mathcal{F}_n\subset\mathcal{G}_n$. Έπεται ότι η $(X_n)_{n\geqslant 0}$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$. □

Άσκηση 3.4 *Έστω $(S_n)_{n\geqslant 0}$ ο απλός ασυμμετρικός τυχαίος περίπατος όπως ορίστηκε στην Παρατήρηση* 3.18 *και ορίζουμε τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ ως $\mathcal{F}_0 := \{\varnothing,\Omega\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1,X_2,\dots,X_n)$ για $n\geqslant 1$. Να δειχθεί ότι οι ακολουθίες $(W_n)_{n\geqslant 0}$, $(M_n)_{n\geqslant 0}$ με $W_n := S_n-(p-q)n$, $M_n := (q/p)^{S_n}$ είναι martingales ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.*

Λύση:
Η $(W_n)_{n\geqslant 0}$ είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$, αφού για κάθε $n\geqslant 0$ η S_n είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη. Επίσης, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}|W_n| = \mathbb{E}|S_n-(p-q)n| \overset{p-q>0}{\leqslant} \mathbb{E}|S_n| + (p-q)n \leqslant n+(p-q)n < \infty.$$

Έστω $n\in\mathbb{N}$. Είναι $W_{n+1} = S_{n+1}-(p-q)(n+1) = S_n + X_{n+1} - (p-q)n - (p-q)$, δηλαδή $W_{n+1} = W_n + X_{n+1} - (p-q)$, οπότε $W_{n+1}-W_n = X_{n+1}-(p-q)$. Εφόσον η W_n είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη, ισχύει ότι $\mathbb{E}\left(W_n\mid\mathcal{F}_n\right) = W_n$, επομένως παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(W_{n+1}\mid\mathcal{F}_n\right) - W_n &= \mathbb{E}\left(W_{n+1}\mid\mathcal{F}_n\right) - \mathbb{E}\left(W_n\mid\mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}\left(W_{n+1}-W_n\mid\mathcal{F}_n\right)\\ &= \mathbb{E}\left(X_{n+1}-(p-q)\mid\mathcal{F}_n\right) \overset{X_{n+1}\perp\mathcal{F}_n}{=} \mathbb{E}(X_{n+1}) - (p-q)\\ &= 1\cdot p + (-1)\cdot q - (p-q) = 0,\end{aligned}$$

άρα για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει ότι $\mathbb{E}\left(W_{n+1}\mid\mathcal{F}_n\right) = W_n$. Έπεται ότι η $(W_n)_{n\geqslant 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

Έστω τώρα $M_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$, $n \geqslant 0$. Η $(M_n)_{n\geqslant 0}$ είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$, αφού για κάθε $n \geqslant 0$ η S_n είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη. Επίσης, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}|M_n| = \mathbb{E}\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\right\} = \mathbb{E}\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^{X_1+\cdots+X_n}\right\} = \mathbb{E}\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^{X_1}\cdots\left(\frac{q}{p}\right)^{X_n}\right\} \overset{X_1,\dots,X_n \text{ i.i.d.}}{=}$$

$$= \mathbb{E}\left(\frac{q}{p}\right)^{X_1}\cdots\mathbb{E}\left(\frac{q}{p}\right)^{X_n} = \left\{\mathbb{E}\left(\frac{q}{p}\right)^{X_1}\right\}^n = \left(p\cdot\frac{q}{p} + q\cdot\frac{p}{q}\right)^n = 1 < \infty.$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Εφόσον η $(q/p)^{S_n}$ είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n+1}}\middle|\mathcal{F}_n\right\} = \mathbb{E}\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}}\middle|\mathcal{F}_n\right\}$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\mathbb{E}\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}}\middle|\mathcal{F}_n\right\} \overset{X_{n+1}\perp\!\!\!\perp\mathcal{F}_n}{=} \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\mathbb{E}\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}}\right\}$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\left(p\cdot\frac{q}{p} + q\cdot\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}(q+p) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} = M_n,$$

άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\mathbb{E}\left(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = M_n$. Έπεται ότι η $(M_n)_{n\geqslant 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$. □

Άσκηση 3.7 *Αν $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, να δειχθεί ότι η σταθερή τυχαία μεταβλητή $T = k$ είναι χρόνος διακοπής.*

Λύση:
Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε, για την τυχαία μεταβλητή T έχουμε

$$\{T \leqslant n\} := \{\omega \in \Omega : \ T(\omega) \leqslant n\} = \begin{cases}\Omega, & \text{αν } k \leqslant n\\ \varnothing, & \text{αν } k > n\end{cases} \in \mathcal{F}_n,$$

άρα η T είναι χρόνος διακοπής. □

Άσκηση 3.8 *Αν οι τυχαίες μεταβλητές S, T είναι χρόνοι διακοπής ως προς μια διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$, να δειχθεί ότι χρόνοι διακοπής ως προς την ίδια διήθηση είναι επίσης και οι τυχαίες μεταβλητές $S \wedge T$, $S \vee T$, $S + T$.*

Λύση:
Έστω $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε ότι

$$\{S \wedge T \leqslant n\} = \underbrace{\{T \leqslant n\}}_{\in\mathcal{F}_n} \cup \underbrace{\{S \leqslant n\}}_{\in\mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$$

$$\{S \vee T \leqslant n\} = \underbrace{\{T \leqslant n\}}_{\in\mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{S \leqslant n\}}_{\in\mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$$

$$\{T + S \leqslant n\} = \bigcup_{k=0}^{n}(\underbrace{\{T = k\}}_{\in\mathcal{F}_k\subset\mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{S \leqslant n-k\}}_{\in\mathcal{F}_{n-k}\subset\mathcal{F}_n}) \in \mathcal{F}_n,$$

άρα οι τυχαίες μεταβλητές $S \wedge T$, $S \vee T$, $S + T$ είναι χρόνοι διακοπής ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$. □

Άσκηση 3.9 *Αν η ανέλιξη $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ και T είναι χρόνος διακοπής ως προς την ίδια διήθηση, να δειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση X_n^T είναι $\mathcal{F}_n$−μετρήσιμη. Ιδιαιτέρως, η X_n^T είναι τυχαία μεταβλητή.*

Λύση:
Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Θα δείξουμε ότι $\{X_{n\wedge T} \in A\} \in \mathcal{F}_n$. Διαμερίζουμε αυτό το σύνολο με βάση τις τιμές του T. Δηλαδή, γράφουμε

$$\begin{aligned}\{X_{n\wedge T} \in A\} &= \left(\bigcup_{k=0}^{n}\Big(\{X_{n\wedge T} \in A\} \cap \{T = k\}\Big)\right) \cup \Big(\{X_{n\wedge T} \in A\} \cap \{T \geqslant n+1\}\Big)\\ &= \left(\bigcup_{k=0}^{n}\Big(\underbrace{\{X_k \in A\}}_{\in\mathcal{F}_k\subset\mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T = k\}}_{\in\mathcal{F}_k\subset\mathcal{F}_n}\Big)\right) \cup \Big(\underbrace{\{X_n \in A\}}_{\in\mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T \geqslant n+1\}}_{\in\mathcal{F}_n}\Big) \in \mathcal{F}_n,\end{aligned}$$

οπότε η συνάρτηση X_n^T είναι $\mathcal{F}_n$−μετρήσιμη. Ιδιαιτέρως, η $X_n^T : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή. □

Άσκηση 3.11 *Θεωρούμε την ειδική περίπτωση του Παραδείγματος* 3.3 *κατά την οποία η Z_1 παίρνει τις τιμές* 0 *και* 2 *με πιθανότητα* $1/2$ *την καθεμία. Θεωρούμε τις $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$, $(R_n)_{n\geqslant 0}$ όπως εκεί και τον χρόνο διακοπής $N := \min\{n \geqslant 1 : R_n = 0\}$. Τι κατανομή έχει ο N; Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής για το martingale R και τον χρόνο N;*

Λύση:
Έχουμε το πολλαπλασιαστικό martingale $(R_n)_{n\geqslant 0}$, όπου $R_0 = 1$ και $R_n = Z_1Z_2\cdots Z_n$ για $n \geqslant 1$. Κάθε φορά το R_n είτε μηδενίζεται είτε διπλασιάζεται. Ισχύει ότι

$$\mathbb{P}(N = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k},$$

άρα $N \sim \mathrm{Geom}(1/2)$. Παρατηρούμε ότι δεν ικανοποιείται καμία από τις τρεις υποθέσεις του Θεωρήματος Επιλεκτικής Διακοπής, οπότε δεν είναι έκπληξη ότι το συμπέρασμα του θεωρήματος δεν ισχύει αφού $\mathbb{E}(R_N) = 0 \neq 1 = \mathbb{E}(R_0)$. □

Άσκηση 4.9 *Έστω $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ θετικό συνεχές martingale με $X_0 = x_0 \in (0,\infty)$ δεδομένη σταθερά και $\lim_{t\to\infty} X_t = 0$ με πιθανότητα 1. Θέτουμε $X^* := \sup_{t\geqslant 0} X_t$. Να δειχθεί ότι για κάθε $x > x_0$ ισχύει*

$$\mathbf{P}(X^* \geqslant x) = \frac{x_0}{x}.$$

[Υπόδειξη: Έστω $T := \inf\{t \geqslant 0 : X_t = x\}$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής για το martingale X και τον χρόνο $T \wedge r$ με $r \in (0,\infty)$ αυθαίρετο.]

Λύση:
Ο $T := \inf\{t \geqslant 0 : X_t = x\}$ είναι χρόνος διακοπής, αφού

$$\{T \leqslant t\} = \cap_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,t]}\{X_q \leqslant x\} \in \mathcal{F}_t$$

για κάθε $t \geqslant 0$. Για $r > 0$ δεδομενο, εφόσον η $(X_t)_{t\geqslant 0}$ είναι martingale και ο $T \wedge r$ είναι φραγμένος χρόνος διακοπής, από το Θεώρημα Επιλεκτικής Διακοπής (Θεώρημα 4.15), παίρνουμε ότι ισχύει $\mathbb{E}(X_{r\wedge T}) = \mathbb{E}(X_0)$. Επομένως, έχουμε:

$$x_0 = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{r\wedge T}) = \mathbb{E}(X_r \mathbf{1}_{T>r}) + \mathbb{E}(X_T \mathbf{1}_{T\leqslant r})$$

$$= \mathbb{E}(X_r \mathbf{1}_{T>r}) + x\,\mathbf{P}(T \leqslant r).$$

Για $r \to \infty$, έχουμε ότι $X_r \mathbf{1}_{T>r} \to 0$ (σημειακά). Αφού $|X_r \mathbf{1}_{T>r}| \leqslant x$, από το Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης προκύπτει ότι $\lim\limits_{r\to\infty} \mathbb{E}(X_r \mathbf{1}_{T>r}) = 0$. Για $r \to \infty$, προκύπτει λοιπόν ότι

$$x_0 = x\,\mathbf{P}(T < \infty) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P}(T < \infty) = \frac{x_0}{x}.$$

Παρατηρούμε ότι $\{X^* \geqslant x\} = \{T < \infty\}$, επομένως παίρνουμε ότι

$$\mathbf{P}(X^* \geqslant x) = \mathbf{P}(T < \infty) = \frac{x_0}{x}.$$

□

Σημείωση: Αξίζει να παρατηρήσουμε πόσο εντυπωσιακό είναι αυτό το αποτέλεσμα. Οι προϋποθέσεις του είναι πολύ λίγες, γεγονός που μας επιτρέπει να βρίσκουμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\sup_{t\geqslant 0} X_t$ για μία πολύ μεγάλη κλάση συνεχών martingales $(X_t)_{t\geqslant 0}$.

Κατασκευή της κίνησης Brown και απλές ιδιότητες

Στις ασκήσεις παρακάτω, B είναι μία τυπική κίνηση Brown (Τ.Κ.Β.).

Άσκηση 5.1 *Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(t) = \mathbf{P}(B(t) > t)$ για κάθε $t > 0$.*
(α) Να δειχθεί ότι η f είναι φθίνουσα.
(β) Ποια είναι η παράγωγός της;

Λύση:
(α) Για κάθε $t > 0$ έχουμε ότι $B(t) \sim \sqrt{t}Z$, όπου $Z \sim N(0, 1)$, άρα

$$f(t) = \mathbf{P}(B(t) > t) = \mathbf{P}(\sqrt{t}Z > t) = \int_{\sqrt{t}}^{\infty} f_Z(s)\, ds,$$

η οποία είναι φθίνουσα συνάρτηση.

(β) Από τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε για κάθε $t > 0$ ότι

$$f'(t) = -f_Z\big(\sqrt{t}\big) \cdot \big(\sqrt{t}\big)' = -f_Z\big(\sqrt{t}\big) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t/2} \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

□

Άσκηση 5.3 *Έστω $n \in \mathbb{N}^+$, χρόνοι $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, και σταθερές $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή*

$$a_1 B(t_1) + \ldots a_n B(t_n)$$

ακολουθεί την κανονική κατανομή. Ποια είναι η μέση τιμή και διασπορά της;

Λύση:
Έστω $Z = a_1 B(t_1) + \ldots a_n B(t_n)$. Αν οι $B(t_1), \ldots, B(t_n)$ ήταν ανεξάρτητες, τότε η Z θα ακολουθούσε κανονική κατανομή. Η ιδέα λοιπόν είναι να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα των ανεξάρτητων προσαυξήσεων της κίνησης Brown, για να σχηματίσουμε ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $Y_i = B(t_i) - B(t_{i-1})$, για $i = 1, \ldots, n$. Οι Y_i είναι ανεξάρτητες και $Y_i \sim N(0, t_i - t_{i-1})$. Από τον ορισμό των Y_i, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} Z &= a_1 Y_1 + a_2(Y_1 + Y_2) + \cdots + a_n(Y_1 + \cdots + Y_n) \\ &= (a_1 + \cdots + a_n)Y_1 + (a_2 + \cdots + a_n)Y_2 + \cdots + a_n Y_n, \end{aligned}$$

δηλαδή η Z είναι γραμμικός συνδυασμός ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία από τις οποίες ακολουθεί κανονική κατανομή. Έπεται ότι η τ.μ. $Z = a_1 B(t_1) + \ldots a_n B(t_n)$ ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, όπου για τις παραμέτρους της έχουμε ότι $\mu = 0$ και, αφού $Y_i \sim N(0, t_i - t_{i-1})$, είναι $\sigma^2 = (a_1 + \cdots + a_n)^2 t_1 + (a_2 + \cdots + a_n)^2 (t_2 - t_1) + \cdots + a_n^2 (t_n - t_{n-1})$. □

Άσκηση 5.5 *Έστω $t > 0$. Να δειχθεί ότι η $X = \int_0^t B(s) ds$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0, t^3/3)$.*

Λύση:
Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής αποτέλεσμα: Έστω ότι $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Τότε $X_n \Rightarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)$ αν και μόνο αν $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu, \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = \sigma^2$.

Η B είναι (με πιθανότητα 1) συνεχής συνάρτηση, άρα η X είναι καλώς ορισμένη ως ολοκλήρωμα Riemann. Πρέπει να δείξουμε ότι $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Θα βρούμε πρώτα τα $\mathbb{E}(X)$ και $\operatorname{Var}(X)$. Έχουμε ότι $\int_0^t \mathbb{E}\big|B(s)\big|\,ds = \int_0^t \sqrt{s}\,\mathbb{E}|Z|\,ds < \infty$, όπου $Z \sim N(0,1)$, άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Fubini και παίρνουμε

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\left[\int_0^t B(s)\,ds\right] = \int_0^t \mathbb{E}(B(s))\,ds \overset{B(s)\sim N(0,s)}{=} \int_0^t 0\,ds = 0.$$

Για τη $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}X^2 - 0^2$ χρησιμοποιούμε ένα (στάνταρ) τέχνασμα.

$$\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t B(s)\,ds\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t B(s)\,ds\right)\left(\int_0^t B(s)\,ds\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t B(s)\,ds\right)\left(\int_0^t B(r)\,dr\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t\int_0^t B(r)\,B(s)\,dr\,ds\right]$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^t\int_0^t \mathbb{E}\Big[B(r)\,B(s)\Big]\,dr\,ds = \int_0^t\int_0^t \mathrm{Cov}\Big(B(r)\,,\,B(s)\Big)\,dr\,ds$$

$$= \int_0^t\int_0^t s\wedge r\,dr\,ds = \iint_{T_1} r\,dr\,ds + \iint_{T_2} s\,dr\,ds = 2\iint_{T_1} r\,dr\,ds$$

$$= 2\int_0^t\int_0^s r\,dr\,ds = 2\int_0^t \frac{s^2}{2}\,dr = \frac{t^3}{3},$$

όπου T_1 είναι το υποσύνολο των $(r,s) \in [0,t]^2$ με $r < s$, και T_2 το υποσύνολο όπου $s < r$. Λόγω συμμετρίας παίρνουμε την τελευταία ισότητα της τέταρτης γραμμής πιο πάνω.

Μένει να δείξουμε ότι η X ακολουθεί κανονική κατανομή. Προσεγγίζοντας με αθροίσματα Riemann, έχουμε ότι

$$X_n = \frac{t}{n}\sum_{k=1}^n B\left(\frac{kt}{n}\right) \xrightarrow{a.s.} X \text{ για } n \to \infty,$$

άρα $X_n \Rightarrow X$. Επίσης $X_n \sim N(0,\sigma_n^2)$ (με βάση την Άσκηση 5.3 πιο πάνω) με το σ_n^2 να δίνεται από έκφραση που συναντήσαμε στη λύση της Άσκησης 5.3. Τώρα μπορούμε να συνεχίσουμε με δυο τρόπους.

(α) Δείχνουμε ότι $\lim_{n\to\infty}\sigma_n^2 = t^3/3$. Και τότε δείχθηκε το ζητούμενο με βάση το αποτέλεσμα που διατυπώσαμε στην αρχή της λύσης. Μάλιστα, με αυτό το επιχείρημα δεν χρειάζεται να κάνουμε τον υπολογισμό της $\mathrm{Var}(X)$ πιο πάνω.

(β) Η $X_n \Rightarrow X$, δίνει ότι $\phi_X(t) = \lim_{n\to\infty}\phi_{X_n}(t) = e^{-t^2\lim_{n\to\infty}\sigma_n^2/2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Η ύπαρξη του ορίου $A := \lim_{n\to\infty}\sigma_n^2$ έπεται από την ύπαρξη του ορίου $\lim_{n\to\infty}\phi_{X_n}(t)$ για κάποιο $t \neq 0$. Αν $A = \infty$, τότε θα είχαμε $\phi_X(t) = \mathbf{1}_{t=0}$, η οποία ως ασυνεχής συνάρτηση του t δεν μπορεί να είναι χαρακτηριστική συνάρτηση τυχαίας μεταβλητής με τιμές στο $\mathbb{R}$, όπως είναι η X. Αν $A = 0$, τότε θα είχαμε $X_n \Rightarrow 0$, άρα $X = 0$ με πιθανότητα 1, το οποίο δεν είναι σωστό (αφού π.χ. δείξαμε ότι έχει θετική δεύτερη ροπή). Άρα $A \in (0,\infty)$ και η $\phi_X(t) = e^{-t^2A/2}$ δίνει ότι $X \sim N(0,A)$. Έχουμε ήδη δείξει ότι η διασπορά της X είναι $t^3/3$, άρα $A = t^3/3$, και το ζητούμενο δείχθηκε.

Στόχος του δεύτερου τρόπου είναι να αποφύγουμε τον υπολογισμό του σ_n^2. $\square$

Άσκηση 5.9 *Έστω $t_0 \geqslant 0$. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 η κίνηση Brown δεν έχει τοπικό ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) στο t_0.*

Λύση:
Έστω A το ενδεχόμενο η B να έχει τοπικό μέγιστο το t_0, δηλαδή

$$A = \{\omega \in \Omega : t_0 \text{ τοπικό μέγιστο για την } B(\omega)\}.$$

Η ανέλιξη $(X(t))_{t\geqslant 0}$ με $X(t) := B(t+t_0) - B(t_0)$ για κάθε $t \geqslant 0$ είναι τυπική κίνηση Brown. Έστω $T^+(X) := \inf\{t > 0 : X(t) > 0\}$. Τότε $A \subseteq \{T^+(X) > 0\}$. Γνωρίζουμε όμως ότι

$$\mathbf{P}(T^+(X) > 0) = 0,$$

άρα $\mathbf{P}(A) = 0$. Ομοίως για t_0 τοπικό ελάχιστο. □

Άσκηση 7.1 *Έστω $(B(t))_{t\geqslant 0}$ τυπική κίνηση Brown. Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $X_t := t\,B(t) - \int_0^t B(r)\,dr$, $t \geqslant 0$ είναι martingale ως προς τη διήθηση που παράγει η B.*

Λύση:
Η ανέλιξη (X_t) είναι προσαρμοσμένη ως προς τη διήθηση που παράγει η B (προκύπτει άμεσα από τον τύπο της). Από το Θεώρημα Fubini, παίρνουμε ότι

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t |B(r)|\,dr\right) = \int_0^t \underbrace{\mathbb{E}|B(r)|}_{\sqrt{r}\mathbb{E}|B(1)|}\,dr < \infty \quad \Rightarrow \quad X_t \in L^1 \ \forall t \geqslant 0.$$

Για να δείξουμε ότι η (X_t) είναι martingale, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $0 \leqslant s < t$ ισχύει $\mathbb{E}(X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s) = 0$. Πράγματι, τότε, χρησιμοποιώντας ότι η X_s είναι $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμη, προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_s \mid \mathcal{F}_s) = X_s,$$

όπως θέλαμε. Έστω λοιπόν $0 \leqslant s < t$. Έχουμε ότι

$$X_t - X_s = tB(t) - sB(s) - \int_s^t B(r)dr = t(B(t) - B(s)) + (t-s)B(s) - \int_s^t B(r)dr,$$

άρα, βάζοντας μέσες τιμές και χρησιμοποιώντας την άσκηση 4.1, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s) &= (t-s)B(s) - \mathbb{E}\left(\int_s^t B(r)dr \mid \mathcal{F}_s\right)\\ &= (t-s)B(s) - \int_s^t \mathbb{E}(B(r) \mid \mathcal{F}_s)dr\\ &= (t-s)B(s) - \int_s^t B(s)dr = (t-s)B(s) = (t-s)B(s) = 0\end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Άσκηση 7.3 *Έστω B τυπική κίνηση Brown και $\mu > 0$. Θεωρούμε την ανέλιξη X με*

$$X_t := B(t) + \mu t$$

για κάθε $t \geqslant 0$. Η X ονομάζεται κίνηση Brown με τάση μ. Για $r \in \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$R := \inf\{X_t : t \geqslant 0\}.$$

Να δειχθεί ότι η $-R$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 2μ. Βρείτε κατάλληλο $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ώστε η $M_t := e^{\lambda X_t}$ να είναι martingale με $\lim_{t\to\infty} M_t = 0$ και χρησιμοποιήστε την Άσκηση 4.9.

Λύση:
Από το Θεώρημα 7.1 γνωρίζουμε ότι η ανέλιξη $\left\{e^{\lambda B(t) - \frac{\lambda^2}{2}t} : t \geqslant 0\right\}$ είναι martingale ως προς την επαυξημένη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Εδώ είναι $X_t := B(t) + \mu t$, άρα για $\lambda := -2\mu$ έχουμε

$$M_t := e^{\lambda X_t} = e^{\lambda B(t) + \lambda \mu t} = e^{\lambda B(t) - \frac{\lambda^2}{2}t},$$

οπότε η $(M_t)_{t\geqslant 0}$ είναι martingale. Δείχνουμε τώρα ότι $\lim\limits_{t\to\infty} M_t = 0$. Έχουμε ότι

$$M_t = e^{-2\mu X_t} = e^{-2\mu B(t)-2\mu^2 t} = \exp\left\{ -2\mu t\left(\mu + \frac{B(t)}{t}\right)\right\} \xrightarrow{t\to\infty} 0,$$

αφού $\lim_{t\to\infty} B(t)/t = 0$, οπότε ο εκθέτης συγκλίνει στο $-\infty$. Έστω $y > 0$. Βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{P}(-R \geqslant y) \overset{\mu>0}{=} \mathbf{P}(-2\mu R \geqslant 2\mu y) = \mathbf{P}\left(e^{-2\mu R} \geqslant e^{2\mu y}\right) = \mathbf{P}\left(e^{-2\mu \inf\{X_t : t\geqslant 0\}} \geqslant e^{2\mu y}\right)$$

$$= \mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant 0} e^{-2\mu X_t} \geqslant e^{2\mu y}\right) = \mathbf{P}(M^* \geqslant e^{2\mu y}) \overset{\text{Άσκηση 4.9}}{=} \frac{e^{-2\mu\cdot 0}}{e^{2\mu y}} = e^{-2\mu y},$$

οπότε $-R \sim \mathrm{Exp}(2\mu)$. □

Άσκηση 7.5 *Έστω $B = (B^{(1)}, B^{(2)})$ διδιάστατη τυπική κίνηση Brown και $a \neq 0$. Θέτουμε $T_a := \inf\{s \geqslant 0 : B^{(1)}(s) = a\}$. Να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή $B^{(2)}(T_a)$ έχει την κατανομή Cauchy με παράμετρο κλίμακας a. Δηλαδή έχει πυκνότητα $f(x) = \pi^{-1}|a|/(x^2 + a^2)$ (για κάθε $x \in \mathbb{R}$) και χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi(t) = e^{-|a||t|}$ (για κάθε $t \in \mathbb{R}$).*

Λύση:
Θα το δείξουμε με χαρακτηριστικές. Θα δείξουμε δηλαδή ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\phi_{B^{(2)}(T_a)}(t) = e^{-|a||t|}.$$

Από την Πρόταση 2.13 γνωρίζουμε ότι αν η τυχαία μεταβλητή X είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη και η τυχαία μεταβλητή Y είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{G}$ (όπου $\mathcal{G}$ σ-άλγεβρα στον δειγματικό χώρο Ω, υποσύνολο της $\mathcal{F}$), τότε

$$\mathbb{E}(h(X,Y) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}\left(h(x,Y)\right)\Big|_{x=X}.$$

Εδώ παίρνουμε $X = T_a$, $Y = B^{(2)}$ τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ και στο $C[0,\infty)$ αντίστοιχα, και τη σ-άλγεβρα $\mathcal{G} = \sigma(T_a)$, οπότε ισχύει ότι

$$\mathbb{E}(h(T_a, B^{(2)}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}\left(h(x, B^{(2)})\right)\Big|_{x=X}.$$

Από τον ορισμό της χαρακτηριστικής συνάρτησης και χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, παίρνουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\phi_{B^{(2)}(T_a)}(t) = \mathbb{E}\left(e^{itB^{(2)}(T_a)}\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{itB^{(2)}(T_a)} \middle| T_a\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{itB^{(2)}(T_a)} \middle| \sigma(T_a)\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{itB^{(2)}(x)}\Big|_{x=T_a}\right)\right] \overset{B^{(2)}(x)\overset{d}{=}\sqrt{x}Z}{=} \mathbb{E}\left(e^{-\frac{t^2}{2}x}\Big|_{x=T_a}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\frac{t^2}{2}T_a}\right) = e^{-|a||t|},$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την Πρόταση 7.3. Έπεται λοιπόν ότι $B^{(2)}(T_a) \sim \mathrm{Cauchy}(0,a)$. □

Άσκηση 9.3 *Για $a \in \mathbb{R}$, θεωρούμε την ανέλιξη X με $X(t,\omega) := e^{aB_t^2}$ για κάθε $(t,\omega) \in [0,1] \times \Omega$. Να βρεθεί για ποια a είναι η X στοιχείο του $\mathcal{H}^2[0,1]$ και για αυτά τα a να υπολογιστεί η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $J(a) := \int_0^1 e^{aB_t^2} dB_t$.*

Λύση:
Η X είναι στοιχείο του $\mathcal{H}^2[0,1]$ αν, και μόνο αν,

$$\|X\|^2_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})} := \mathbb{E}\left(\int_0^1 X(s,\omega)^2 ds\right) < \infty.$$

Χρησιμοποιώντας ότι $B_s \overset{d}{=} \sqrt{s}Z$, όπου $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, παίρνουμε ότι

$$\mathbb{E}\left(\int_0^1 X(s,\omega)^2 ds\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^1 e^{2aB_s^2} ds\right) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \mathbb{E}\left(e^{2asZ^2}\right) ds.$$

Υπολογίζουμε τη ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής Z^2:

$$\mathbb{E}(e^{\lambda Z^2}) = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2(1-2\lambda)/2} dx,$$

άρα

$$\mathbb{E}(e^{\lambda Z^2}) = \begin{cases} +\infty & \text{αν } 1-2\lambda \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}, & \text{αν } 1-2\lambda > 0, \end{cases} = \begin{cases} +\infty & \text{αν } \lambda \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-2\lambda}} & \text{αν } \lambda < \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

διότι αν $\lambda < 1/2$, τότε

$$\mathbb{E}(e^{\lambda Z^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi\sigma^2} = \sigma := \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}.$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\mathbb{E}\left(\int_0^1 X(s,\omega)^2 ds\right) = \int_0^1 \mathbb{E}\left(e^{2asZ^2}\right) ds = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-4as}} \cdot \mathbf{1}_{4as<1} + \infty \cdot \mathbf{1}_{4as\geqslant 1}\right) ds. \tag{1}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $a \leqslant 0$, τότε $\dfrac{1}{\sqrt{1-4as}} \leqslant 1$ και άρα έχουμε σύγκλιση:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^1 X(s,\omega)^2 ds\right) = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-4as}}.$$

- Αν $a > 0$, τότε διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις (βάσει της δείκτριας):
  - Αν $\dfrac{1}{4a} < 1$, τότε δεν έχουμε σύγκλιση:

  $$\mathbb{E}\left(\int_0^1 X(s,\omega)^2 ds\right) = \infty$$

  γιατί στο τελευταίο ολοκλήρωμα στην (1) ο ολοκληρωτέος είναι μη αρνητικός και ισούται με ∞ σε σύνολο θετικού μέτρου, στο $[1/4a, 1]$.
  - Αν $\dfrac{1}{4a} \geqslant 1$, τότε έχουμε σύγκλιση:

  $$\mathbb{E}\left(\int_0^1 X(s,\omega)^2 ds\right) = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-4as}}.$$

Τελικά, $X \in \mathcal{H}^2[0,1]$ αν, και μόνο αν, $a \leqslant \dfrac{1}{4}$.

Για $a \leqslant 1/4$, εφόσον $X \in \mathcal{H}^2[0,1]$, η τυχαία μεταβλητή $J(a) := \int_0^1 e^{aB_t^2} dB_t$ έχει $\mathbb{E}(J(a)) = 0$. Για την διασπορά, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(J(a)) &= \mathbb{E}\left\{(J(a))^2\right\} - \{\mathbb{E}(J(a))\}^2 = \mathbb{E}\left\{\left(\int_0^1 e^{aB_t^2} dB_t\right)^2\right\} = \mathbb{E}\left(\int_0^1 e^{2aB_t^2} dt\right) \\ &= \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-4as}} = \frac{1}{2a}(1-\sqrt{1-4a}).\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα της πρώτης γραμμής είναι συνέπεια της ισομετρίας Itô. □

Άσκηση 9.4 *Αν $f, g \in \mathcal{H}^2$, τότε*

$$\mathbb{E}\{I(f)I(g)\} = \int_0^\infty \mathbb{E}\{f(t,\omega)g(t,\omega)\}dt.$$

Λύση:
Από τον ορισμό του συνήθους εσωτερικού γινομένου στους $L^2(\mathbf{P}), L^2(\lambda\times\mathbf{P})$, η ζητούμενη γράφεται

$$< I(f), I(g) >_{L^2(\mathbf{P})} = < f, g >_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})} .$$

Αυτό είναι συνέπεια της ισομετρίας Itô και του εξής αποτελέσματος γραμμικής άλγεβρας, του οποίου την απόδειξη θα υπενθυμίσουμε.

Πρόταση: Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{R}$ με εσωτερικό γινόμενο[2] και $T : X \to Y$ γραμμική συνάρτηση. Τότε

$$\|Tx\| = \|x\| \text{ για κάθε } x \in X \text{ αν και μόνο αν } < Tx, Ty > = < x, y > \text{ για κάθε } x, y \in X.$$

Δηλαδή η T είναι διατηρεί τη νόρμα αν και μόνο αν διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο (το να διατηρεί τη νόρμα και να είναι γραμμική δίνει επίσης ότι είναι ισομετρία). Η μία κατεύθυνση είναι προφανής. Υποθέτουμε τώρα ότι η T διατηρεί τη νόρμα. Για δεδομένα $x, y \in X$, ισχύει $\left\|T(x+y)\right\| = \|x+y\|$, η οποία δίνει

$$\begin{aligned}&< T(x+y), T(x+y) > = < x+y, x+y > \\ &\Rightarrow < Tx, Tx > + < Tx, Ty > + < Ty, Tx > + < Ty, Ty > \\ &= < x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y > \\ &\Rightarrow \|Tx\|^2 + 2 < Tx, Ty > + \|Ty\|^2 = \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2 \overset{T \text{ διατηρεί τη νόρμα}}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow 2 < Tx, Ty > = 2 < x, y > \Rightarrow < Tx, Ty > = < x, y > .\end{aligned}$$

Το ζητούμενο τώρα έπεται άμεσα εφαρμόζοντας την πρόταση στη γραμμική απεικόνιση του ολοκληρώματος Itô.

$$I : L^2(\lambda\times\mathbf{P}) \to L^2(\mathbf{P}).$$

□

Το αποτέλεσμα αυτό είναι μία γενίκευση της ισομετρίας Itô και είναι χρήσιμο για τον υπολογισμό της συνδιακύμανσης δύο στοχαστικών ολοκληρωμάτων.

[2] Κάθε χώρος έχει το δικό του εσωτερικό γινόμενο αλλά θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο και για τα δύο. Το ίδιο θα κάνουμε και για τις νόρμες που παράγουν.