Στοχαστικός Λογισμός

Ενδιάμεση εξέταση. 26 Νοεμβρίου 2022

1. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών (με πραγματικές τιμές) σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ώστε $\mathbf{E}(X_i) = 1$ για κάθε $i \in \mathbb{N}^+$. Θέτουμε $R_0 := 1, \mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}, R_n = X_1X_2\cdots X_n, \mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και το μέτρο $\mathbf{P}$.

2. (15 Βαθμοί) Έστω διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $T : \Omega \to [0, \infty]$.
(α) Πότε ονομάζεται η T χρόνος διακοπής ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$;
(β) Αν η T είναι χρόνος διακοπής ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$, να δειχθεί ότι $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ για κάθε $t \geqslant 0$.

3. (25 Βαθμοί) Έστω $(B(t))_{t\geqslant 0}$ μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown.
(α) Ποια η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $B(1) - 2B(4) + 3B(7)$;
(β) Ποια η συνδιακύμανση $\mathrm{Cov}((B(2))^3, B(5))$;
(γ) Ποια η τιμή του ορίου $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(B(t) > \log t)$;

4. (25 Βαθμοί) Έστω $(B(t))_{t\geqslant 0}$ μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown. Για κάθε $t \geqslant 0$ θέτουμε $I_t := \int_0^t B^2(s)\, ds$.
(α) Να δειχθεί ότι για κάθε $t > 0$ ισχύει $I_t \overset{d}{=} t^a I_1$ για κατάλληλη σταθερά $a \in \mathbb{R}$ η οποία και να προσδιοριστεί.
(β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της I_t.

5. (20 Βαθμοί) Έστω διήθηση $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ martingale ως προς αυτήν, και $(A_k)_{k\geqslant 1}$ προβλέψιμη διαδικασία (δηλαδή για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$ η A_k είναι $\mathcal{F}_{k-1}$-μετρήσιμη). Υποθέτουμε ότι $\mathbf{E}(X_k^2) < \infty, |A_k(\omega)| \leqslant 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\omega \in \Omega$. Θέτουμε $Z_0 := 0$ και $Y_n := \sum_{k=1}^n A_k(X_k - X_{k-1})$,

$$Z_n := Y_n^2 - \sum_{k=1}^n A_k^2(X_k - X_{k-1})^2$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Δίνεται ότι για $Z \sim N(0, 1)$ ισχύει $\mathbf{E}(Z^4) = 3$.

Οι απαντήσεις να είναι πλήρως αιτιολογημένες.

Άριστα είναι το 100. Καλή επιτυχία!

Απαντήσεις

4. (α) Στο ολοκλήρωμα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $r = s/t$. Έτσι,

$$I_t = t \int_0^1 B^2(rt)dr = t^2 \int_0^1 \left(\frac{B(rt)}{\sqrt{t}} \right)^2 dr \stackrel{d}{=} t^2 \int_0^1 B^2(r)\, dr.$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι για κάθε $t > 0$ ισχύει (η ιδιότητα αλλαγής κλίμακας)

$$\left(\frac{B(rt)}{\sqrt{t}} \right)_{r \geqslant 0} \stackrel{d}{=} (B(r))_{r \geqslant 0}.$$