**Στοχαστικός Λογισμός 2023**

**Επανάληψη. Παλιά θέματα**

Σε όλες τις ασκήσεις πιο κάτω, $(B_t)_{t\geqslant 0}$ δηλώνει μια τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown.

**1.** (Ιούν. 2012, Τεστ εξάσκησης, 1) Έστω $(X_n)_{n\geqslant 0}$ martingale ως προς την διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ με $\mathbf{E}(X_n^2) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για $0 \leqslant i < j < k$ θετικούς ακεραίους, να δειχθούν τα εξής.

(α) $\mathbf{E}((X_k - X_j)X_i) = 0$.

(β) $\mathbf{E}\{(X_k - X_j)^2 \,|\, \mathcal{F}_i) = \mathbf{E}(X_k^2 \,|\, \mathcal{F}_i) - \mathbf{E}(X_j^2 \,|\, \mathcal{F}_i)$.

**2.** (Απρ. 2017, 6) Έστω $(B_t)_{t\geqslant 0}$ τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown.

(α) Ποια η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $B_1^2 B_3 B_6$;

(β) Να εξεταστεί αν η ανέλιξη $(B_t^2)_{t\geqslant 0}$ είναι martingale, supermartingale ἠ submartingale ως προς τη διήθηση που παράγει η $(B_t)_{t\geqslant 0}$.

(γ) Να υπολογιστεί η $\mathbf{E}(|B_1| \mid B_1^2)$;

**3.** (Νοεμ. 2017, 3) Έστω $z, p \in (0,1), a \neq 0$, και $(X_i)_{i\geqslant 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p, \mathbf{P}(X_1 = -1) = 1 - p$. Θέτουμε

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_0 := \{\varnothing, \Omega\}, \\
&\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad \text{για κάθε } n \geqslant 1 \\
&S_0 := 0, \\
&S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n \qquad \text{για κάθε } n \geqslant 1,
\end{aligned}$$

και $M_n := a^{S_n} z^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(M_n)_{n\geqslant 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ αν και μόνο αν

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1-p)z^2}}{2pz}.$$

**4.** (Νοεμ. 2017, 4) Έστω $(X_i)_{i\geqslant 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{P}(X_1 = i) = 1/6$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. Θέτουμε

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_0 := \{\varnothing, \Omega\}, \\
&\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad \text{για κάθε } n \geqslant 1 \\
&S_0 := 0, \\
&S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n \qquad \text{για κάθε } n \geqslant 1.
\end{aligned}$$

Έστω $T$ ο μοναδικός ακέραιος $k$ ώστε $S_{k-1} < 100 \leqslant S_k$. Να δειχθεί ότι ο $T$ είναι φραγμένος χρόνος διακοπής ως προς την $(\mathcal{F})_{n\geqslant 0}$ και ότι $S_T \leqslant 105$.

**5.** (Φεβρ. 2015, 3) Να υπολογιστεί η μέση τιμή καθεμιάς από τις εξής τυχαίες μεταβλητές:

(α) $B_1 B_3$

(β) $B_1 B_2 B_3$

(γ) $B_1 B_3 B_6 B_{10}$

**6.** (Νοεμ. 2017, 6) Έστω $(B_t)_{t\geqslant 0}, (W_t)_{t\geqslant 0}$ ανεξάρτητες τυπικές (μονοδιάστατες) κινήσεις Brown και $a \in (0,1)$.

(α) Ποια η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $B_1 - 4B_3 + 2B_6$;
(β) Για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ είναι η ανέλιξη $(aB_t + cW_t)_{t\geqslant 0}$ τυπική κίνηση Brown;

**7.** (2020. Φυλλάδιο 2) Έστω $M := \sup\{B_s : s \geqslant 0\}$.
(α) Να δειχθεί ότι $M \overset{\mathrm{d}}{=} aM$ για κάθε $a > 0$.
(β) Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(M \in \{0, \infty\}) = 1$.

**8.** (Νοεμ. 2017, 5) Έστω $(B_t)_{t\geqslant 0}$ τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown. Για κάθε $t \geqslant 0$ θέτουμε $M_t := \max\{B_s : s \in [0, t]\}$. Να δειχθεί ότι
(α) $M_t \overset{d}{=} \sqrt{t} M_1$
(β) $\mathbf{E}(M_t^2) = t$.

**9.** (Σεπτ. 2018, 3) Για κάθε $t \in (0, \infty)$ θέτουμε $X_t := \int_0^t \mathbf{1}_{B_s > 0}\, ds = \lambda(\{s \in [0, t] : B_s > 0\})$.
(α) Να δειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $a > 0$ ώστε να ισχύει $X_t \overset{d}{=} t^a X_1$ για κάθε $t > 0$.
(β) Να υπολογιστεί η $\mathbf{E}(X_t)$.

**10.** (Σεπτ. 2018, 5) Για $a > 0$, έστω $T = \inf\{t \geqslant 0 : |B_t| = a\}$. Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$ και έπειτα να υπολογιστεί η $E(T)$.

**11.** (Ιουν. 2012, Τεστ εξάσκησης, 3)
Να υπολογιστούν οι συνδιακυμάνσεις

(α) $\mathrm{Cov}(tB_{t+1}^2, B_t)$ με $t > 0$.

(β)

$$\mathrm{Cov}\left(\int_0^1 tB_t\, dB_t, \int_0^1 B_t^7\, dB_t\right).$$

**12.** (Σεπτ. 2018, 6) Να δειχθεί ότι για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\mathbf{E}\{\log(1 + B_t^2)\} = \int_0^t \mathbf{E}\left(\frac{1 - B_s^2}{(1 + B_s^2)^2}\right) ds.$$

**13.** (Φεβρ. 2018, 5) Έστω $(B_t)_{t\geqslant 0}, (W_t)_{t\geqslant 0}$ δυό ανεξάρτητες τυπικές μονοδιάστατες κινήσεις Brown. Να υπολογιστούν τα διαφορικά των ανελίξεων
(α) $\cos(tB_t)$,
(β) $B_t^2 e^{\int_0^t s\, dB_s}$,
(γ) $B_t^2 W_t$.

**14.** (Σεπτ. 2018, 7) Θεωρούμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} dX_t &= i\sqrt{2t} X_t dB_t - t^2 X_t dt, \\ X_0 &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

(α) Να βρεθεί μια λύση της (1). [Υποδ.: Υπολογίστε το $d(\log X_t)$.]
(β) Για τη λύση που βρέθηκε στο (α), να υπολογιστεί η $\mathbf{E}(X_t)$.

**15.** (Σεπτ. 2017, 6) Έστω $B$ τυπική κίνηση Brown και $T := \inf\{t > 0 : B_t + t^{-1/2} = 0\}$. Θέτουμε

$$X_t := \frac{1}{t^{-1/2} + B_t}$$

για κάθε $t \in (0, T)$, και $X_0 = 0$. (α) Να δειχθεί ότι η $X$ ικανοποιεί στοχαστική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t$$

για κατάλληλες συναρτήσεις $a, \sigma$.
(β) Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$.

**16.** (Σεπτ. 2016, 3) Έστω $B$ τυπική κίνηση Brown.
(α) Έστω $t > 0$, $n \geqslant 1$ φυσικός, και $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ διαμέριση του $[0, t]$ με $n - 1$ ενδιάμεσα σημεία. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2\right)^2\right] = t^2 + 2\sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1})^2.$$

(β) Έστω $t > 0$ και $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ ακολουθία διαμερίσεων του $[0, t]$ με $\Delta_n := \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} = t\}$ και $\lim_{n\to\infty} \max\{t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)} : j = 1, 2, \dots, n\} = 0$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}})^2\right)^2\right] = t^2.$$

## Σχόλια

**2.** (γ) $\mathbf{E}(|B_1| \mid B_1^2) = |B_1|$ γιατί η τυχαία μεταβλητή $|B_1|$ είναι μετρήσιμη ως προς την $\sigma(B_1^2)$, και αυτό γιατί

$$|B_1| = h(B_1^2)$$

όπου $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(x) := \sqrt{|x|}$ είναι Borel-μετρήσιμη.
Υπενθύμιση: $Y = h(X)$ με $h$ Borel-μετρήσιμη δίνει ότι η $Y$ είναι $\sigma(X)$-μετρήσιμη αφού για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ συνολο Borel έχουμε $Y^{-1}(A) = X^{-1}(h^{-1}(A)) \in \sigma(X)$.

**4.** Ο $T$ είναι φραγμένος γιατί $S_k \geqslant k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, οπότε $T \leqslant 100$.

**11.** (α) Οι $X := B_t, Y := B_{t+1} - B_t$ είναι ανεξάρτητες. Επειδή $\mathbf{E}(B_t) = 0$, υπολογίζουμε την

$$\mathbf{E}(tB_{t+1}^2 B_t) = t\mathbf{E}((X + Y)^2 X) = ... = 0$$

Εναλλακτικά, χρησιμοποιούμε το ότι $(B_t)_{t\geqslant 0} \stackrel{d}{=} (-B_t)_{t\geqslant 0}$ και δείχνουμε αμέσως ότι η συνδιακύμανση ισούται με το αντίθετό της, οπότε είναι 0.
(β) Εφαρμογή της άσκησης 9.4.
Αν στη συνδιακύμανση είχαμε αντί του δεύτερου στοχαστικού ολοκληρώματος απλώς $B_{1/2}$, τότε θα γράφαμε

$$B_{1/2} = \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,1/2]}(s)\, dB_s$$

και θα χρησιμοποιούσαμε πάλι την άσκηση 9.4 (αν και σε αυτό το σενάριο η συνδιακύμανση βγαίνει πάλι αμέσως 0. Αλλά θα μπορούσε το πρώτο στοχαστικό ολοκλήρωμα να είναι το ολοκλήρωμα της $B_s^2$, οπότε το άμεσο επιχείρημα δεν θα λειτουργούσε και η συνδιακύμανση θα έβγαινε κάτι μη μηδενικό).

**13.** (α) Θεωρούμε την ανέλιξη Ito $X_t := tB_t$ και εφαρμόζουμε την 4η μορφή του τύπου του Ito.
(β) Θεωρούμε την ανέλιξη Ito $X_t := \int_0^t s\, dB_s$ και εφαρμόζουμε τον κανόνα του γινομένου και την

4η μορφή του τύπου του Ito (για να βρούμε το διαφορικό της $e^{X_t}$).
(γ) Κανόνας γινομένου.