Άσκηση 4.11(α). Λύση. (Στην εκφώνηση πρέπει να προστεθεί ότι ο T είναι πεπερασμένος με πιθανότητα 1) Έστω A σύνολο Borel στον χώρο που παίρνει τιμές κάθε X_t. Θα δείξουμε ότι $\{X_{T_n} \in A\} \in \mathcal{F}_T$. Για κάθε $t \geqslant 0$ θέτουμε $N := [2^n t]$ και έχουμε

$$\{X_{T_n} \in A\} \cap \{T \leqslant t\} = \cup_{k=0}^{N}(\{X_{k/2^n} \in A\} \cap \{k2^{-n} \leqslant T < (k+1)2^{-n}\} \cap \{T \leqslant t\}).$$

Αυτό γιατί, εφόσον $T \leqslant t$, ο T_n είναι της μορφής $k/2^n$ με $k \leqslant N$.
Τώρα, στην ένωση, έχουμε $\{X_{k/2^n} \in A\} \in \mathcal{F}_{k/2^n} \subset \mathcal{F}_t$ γιατί η ανέλιξη είναι προσαρμοσμένη, ενώ

$$\{k2^{-n} \leqslant T < (k+1)2^{-n}\} \cap \{T \leqslant t\} = \begin{cases} \{k2^{-n} \leqslant T < (k+1)2^{-n}\} \text{ αν } k \leqslant N-1, \\ \{k2^{-n} \leqslant T \leqslant t\} \text{ αν } k = N. \end{cases}$$

Στο σενάριο $k \leqslant N-1$, γράφουμε $\{k2^{-n} \leqslant T < (k+1)2^{-n}\} = \{T < (k+1)2^{-n}\} \setminus \{T < k2^{-n}\}$. Αυτό, λόγω της άσκησης 4.6, ανήκει στην $\mathcal{F}_{(k+1)2^{-n}} \subset \mathcal{F}_t$. Αντίστοιχο επιχείρημα χρησιμοποιούμε και για το σενάριο $k = N$.

Άσκηση 4.6. Λύση. Για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\{T < t\} = \cup_{n=1}^{\infty} \left\{T \leqslant t - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}_t.$$

Δικαιολόγηση στην Πρόταση 6.2. (Τυπογραφικό λάθος. Παντού το T_A πρέπει να γίνει T_C).
Ισχύει η

$$\Omega_0 \cap \{T_C \leqslant t\} = \Omega_0 \cap A_t.$$

[Θα συμβολίζουμε την τιμή της τυχαίας μεταβλητής $B(t)$ στο $\omega \in \Omega$ με $B^{\omega}(t)$.]

Έστω ω στο σύνολο του αριστερού μέλους. Από τον ορισμό του inf, υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ που συγκλίνει στο T_C και $B^{\omega}(t_n) \in C$ για κάθε n. Επειδή η $B^{\omega}(s)$ είναι συνεχής ως προς s και το C είναι κλειστό, θα έχουμε $B^{\omega}(T_C) \in C$. Επειδή $\lim_{s \nearrow T_C} B^{\omega}(s) = B^{\omega}(T_C) \in C$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ υπάρχει ρητός $q \in [0, T_C] \subset [0, t]$ ώστε $||B^{\omega}(q) - B^{\omega}(T_C)|| < 1/n$, και άρα $\omega \in A_t$.

Έστω ω στο σύνολο του δεξιού μέλους. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ υπάρχει $q_n \in \mathbb{Q}, q_n \leqslant t$ ώστε $B^{\omega}(q_n) \in C^{(1/n)}$. Επειδή το $[0, t]$ είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία $(q_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^+}$ της $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ που συγκλίνει σε ένα $\tau \in [0, t]$. Επίσης, για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$ υπάρχει $y_k \in C$ ώστε $||B^{\omega}(q_{n_k}) - y_k|| < 1/k$. Έπεται (επειδή η $B^{\omega}(s)$ είναι συνεχής) ότι $\lim_{k \to \infty} y_k = B^{\omega}(\tau)$. Άρα $B^{\omega}(\tau) \in \bar{C} = C$ (C κλειστό), άρα $T_C \leqslant \tau \leqslant t$.