Στοχαστικός Λογισμός

Εξέταση 31 Ιανουαρίου 2023

1. (20 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα, και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}|X| < \infty$.
(α) Αν η X είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{G}$, να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{G}) = \mathbf{E}(X)$.
(β) Αν $\mathbf{E}(X^2) < \infty$, τότε $0 \leqslant \mathbf{E}\{X\, \mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{G})\} \leqslant \mathbf{E}(X^2)$.

2. (20 Βαθμοί) Έστω διήθηση $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, και $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ martingale ως προς αυτή τη διήθηση.
(α) Η ανέλιξη $(|X_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι martingale, submartingale, ή supermartignale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$;
(β) Έστω διήθηση $(\mathcal{G}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ να έχουμε $\mathcal{G}_k \subset \mathcal{F}_k$ και ότι η X_k είναι $\mathcal{G}_k$-μετρήσιμη. Να δειχθεί ότι η $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{G}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

3. (20 Βαθμοί) (α) Για $t \in [0, \infty)$, το εύρος της κίνησης Brown στο διάστημα $[0, t]$ είναι η τυχαία μεταβλητή $R_t := \sup\{B_s : s \in [0, t]\} - \inf\{B_s : s \in [0, t]\} = \lambda\{B([0, t])\}$. Να δειχθεί ότι για κάθε $t > 0$ ισχύει $R_t \stackrel{d}{=} \sqrt{t} R_1$. [$\lambda$ είναι το μέτρο Lebesgue]
(β) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, θέτουμε $T_a := \inf\{t \geqslant 0 : B_t = a\}$. Για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, να υπολογιστεί το όριο $\lim_{r\to\infty} r^{\varepsilon} \mathbf{P}(T_r > r^{2+2\varepsilon})$.

4. (25 Βαθμοί) (α) Για $a \in \mathbb{R}$, ποια η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $B_1 - aB_4$;
(β) Για $0 \leqslant s < t$, υπολογίστε την $\mathbf{E}(B_t^2 | B_s)$ ως συνάρτηση των s, t, B_s.
(γ) Να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή $Z := \int_0^\infty \frac{B_t}{1+t^2}\, dB_t$ είναι καλά ορισμένη. Ποια η μέση τιμή και ποια η διασπορά της;

5. (20 Βαθμοί) Να υπολογιστούν τα διαφορικά των ανελίξεων
(α) e^{3B_t} (β) $\sin(B_t W_t)$ (γ) $e^{B_t \int_0^t \frac{1}{1+s}\, dB_s}$.
B, W είναι ανεξάρτητες μονοδιάστατες τυπικές κινήσεις Brown.

6. (20 Βαθμοί) Έστω η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} dX_t &= (c - X_t)\, dt + e^{-t}\, dB_t \qquad \text{για } t \in (0, \infty), \\ X_0 &= a, \end{aligned}$$

όπου $a, c \in \mathbb{R}$ είναι σταθερές.
(α) Από τη μορφή της εξίσωσης, τι περιμένετε να συμβαίνει στην X_t για t μεγάλο.
(β) Βρείτε μια λύση της εξίσωσης. Είναι μοναδική; [Υπόδειξη: Υπολογίστε το διαφορικό της $e^t X_t$.]
(γ) Υπάρχει το όριο $\lim_{t\to\infty} X_t$ κατά κατανομή ή με πιθανότητα 1; Πόσο είναι;

Στα θέματα 3, 4, 6, $(B_t)_{t\geqslant 0}$ είναι μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown.

Απαντήστε σε μόνο ένα από τα θέματα 1 και 2.
Οι απαντήσεις να είναι πλήρως αιτιολογημένες.

Άριστα είναι το 100. Καλή επιτυχία!

Απαντήσεις

2. (α) Η $f(x) = |x|$ είναι κυρτή και $\mathbf{E}|f(X_k)| = \mathbf{E}|X_k| < \infty$. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 3.7 των σημειώσεων.
(β) Γενίκευση της άσκησης 3.1 των σημειώσεων.

3. (α) Η ανέλιξη X με $X_s := B_{st}/\sqrt{t}$ για κάθε $s \in [0, \infty)$ είναι τυπική κίνηση Brown, $B([0,t]) = \sqrt{t}X([0,1])$, και επομένως

$$R_t = \lambda\{B([0,t])\} = \sqrt{t}\lambda\{X([0,1])\} \stackrel{d}{=} \sqrt{t}\lambda\{B([0,1])\}.$$

Ψιλά γράμματα: Πρέπει να δείξουμε ότι η απεικόνιση $T : C[0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $T(f) := \lambda\{f([0,1])\}$ είναι μετρήσιμη. Αυτό ισχύει γιατί είναι συνεχής (Στον $C[0,\infty)$ έχουμε τη μετρική της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή). Και αφού οι B, X είναι τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $C[0,\infty)$ και έχουν την ίδια κατανομή, έπεται ότι $T(X) \stackrel{d}{=} T(B)$.
(β)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T_r > r^{2+2\varepsilon}) &= \mathbf{P}(M_{r^{2+2\varepsilon}} < t) = \mathbf{P}(|B_{r^{2+2\varepsilon}}| < r) = \mathbf{P}(r^{1+\varepsilon}|B_1| < r) = \mathbf{P}(|B_1| < r^{-\varepsilon}) \\ &= \int_{-r^{-\varepsilon}}^{r^{-\varepsilon}} f_Z(t)\, dt\end{aligned}$$

όπου f_Z είναι η πυκνότητα της $N(0,1)$. Κατά τα γνωστά, εφόσον η f_Z είναι συνεχής στο 0 (είναι παντού βέβαια), $\lim_{r\to\infty} r^{\varepsilon}\mathbf{P}(T_r > r^{2+2\varepsilon}) = 2f_Z(0) = \sqrt{2/\pi}$.

6. (α) Για μεγάλο t, ο όρος διάχυσης είναι αμελητέος λόγω του e^{-t}. Έπειτα ο όρος τάσης οδηγεί την X_t στο c. Δηλαδή, αν $X_t > c$, ο όρος τάσης μειώνει την X_t (αφού $c - X_t < 0$), ενώ αν $X_t < c$, ο όρος τάσης αυξάνει την X_t (αφού $c - X_t > 0$). Περιμένουμε λοιπόν $\lim_{t\to\infty} X_t = c$.
(β) Λύση η

$$X_t = ae^{-t} + c(1 - e^{-t}) + e^{-t}B_t, t \geqslant 0.$$

Μοναδικότητα με εφαρμογή του Πορίσματος 14.5 των σημειώσεων.