

Στοχαστικός Λογισμός, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
9 Σεπτεμβρίου 2026

Θέμα 1. (15 Βαθμοί) Έστω $X \sim N(0, 1)$, δηλαδή με πυκνότητα $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$A_1 := \{X < -1\},$$

$$A_2 := \{-1 \leq X \leq 1\},$$

$$A_3 := \{X > 1\}$$

και θέτουμε $\mathcal{A} := \sigma(\{A_1, A_2, A_3\})$, τη σ-άλγεβρα που παράγουν. Υπολογίστε την $E(X | \mathcal{A})$. Είναι στη διάθεσή σας η συνάρτηση κατανομής, Φ , της X .

Θέμα 2. (25 Βαθμοί) Έστω $s > 0$ και $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με

$$Z_n = \begin{cases} -1 & \text{με πιθανότητα } n^{-s}/2, \\ 1 & \text{με πιθανότητα } n^{-s}/2, \\ 0 & \text{με πιθανότητα } 1 - n^{-s}. \end{cases}$$

Θέτουμε $Y_0 = 0$ και για $n \in \mathbb{N}^+$, θέτουμε $Y_n := n^s Y_{n-1} |Z_n| + Z_n \mathbf{1}_{Y_{n-1}=0}$. Θεωρούμε τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ και $\mathcal{F}_n := \sigma(\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\})$ για $n \in \mathbb{N}^+$. Να δείχθει ότι

(α) η $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

(β) η $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

(γ) αν $s \in (0, 1)$, τότε $\mathbf{P}(\{Y_n = 1 \text{ για άπειρα } n\}) = 1$.

Θέμα 3. (20 Βαθμοί) Έστω $(B_t)_{t \geq 0}$ μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown.

(α) Ποια είναι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $B_1 - B_6 - 2B_3$;

(β) Για κάθε $t > 0$ θέτουμε $r_t := \inf\{s \geq t : B_s = 0\}$, $m_t := r_t - t$. Δείξτε ότι $\mathbf{P}(m_t > 0) = 1$ για κάθε $t > 0$ και ότι υπάρχει σταθερά $a > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $t > 0$ να ισχύει $m_t \stackrel{d}{=} t^a m_1$.

Θέμα 4. (20 Βαθμοί) (α) Να υπολογιστούν τα διαφορικά των ανελίξεων

$$\sin(B_t), \quad t^2 \sin(B_t), \quad e^{\int_0^t B_s^2 dB_s}, \quad \frac{1}{B_t^2 + W_t^2},$$

όπου $(B_t)_{t \geq 0}, (W_t)_{t \geq 0}$ είναι μονοδιάστατες τυπικές κινήσεις Brown.

Θέμα 5. (25 Βαθμοί) (α) Βρείτε μια λύση για τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = r \frac{X_t}{1-t} dt + (1-t)^c dB_t, t \in (0, 1)$$
$$X_0 = 0$$

όπου τα $r, c \in \mathbb{R}$ είναι δεδομένες σταθερές. [Υπόδειξη: Υπολογίστε το $d((1-t)^a X_t)$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.]

(β) Είναι η λύση του (α) μοναδική;

(γ) Υπολογίστε τη $\text{Var}(X_t)$ για κάθε $t \in (0, 1)$ για τη λύση του (α).

Να λυθούν όλα τα θέματα.

Οι απαντήσεις να είναι αιτιολογημένες.

Άριστα είναι το 100.

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες. Καλή επιτυχία.