Το θεώρημα σύγκλισης των martingales

Από τα παρακάτω, εντός ύλης είναι η εκφώνηση του Θεωρήματος 1, το Πόρισμα 1 (με απόδειξη), οι πέντε πρώτες γραμμές από την Εφαρμογή 1, οι Ασκήσεις 1, 2, και η Πρόταση 4 (με απόδειξη). Κάντε μια ανάγνωση (όσο θέλει ο καθένας) τις αποδείξεις των: Θεώρημα 1, Πόρισμα 1, Πρόταση 2, Πρόταση 3, Εφαρμογή 2, Εφαρμογή 3.

1. Θεωρια

Έστω $Y = (Y_k)_{k\in I}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $I = \{0, 1, \ldots, r\}$ για κάποιο $r \in \mathbb{N}$ ή $I = \mathbb{N}$ και $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Κατωδιάσχιση του $[a, b]$ για την Y λέμε κάθε περιορισμό $Y|[i, j]$ με $i, j \in I, i < j$ και $Y(i) \geqslant a > b \geqslant Y(j)$ ώστε να μην υπάρχει υποδιάστημα $[i', j] \subsetneq [i, j]$ με $Y(i') \geqslant b < a \geqslant Y(j')$. Για κάθε $n \in I$, ορίζουμε

$$D_n(a, b; Y) := \text{αριθμός κατωδιασχίσεων του } [a, b] \text{ για την } Y|[0, n]$$

και

$$D_\infty(a, b; Y) := \text{αριθμός κατωδιασχίσεων του } [a, b] \text{ για την } Y$$

όταν $I = \mathbb{N}$.

Πρόταση 1. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $X = (X_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ submartingale και $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Τότε ισχύει*

$$\boldsymbol{E}\{D_n(a, b; X)\} \leqslant \frac{\boldsymbol{E}\{(X_n - b)^+\} - \boldsymbol{E}\{(X_0 - b)^+\}}{b - a}.$$

Η X δεν μπορεί να έχει πολλές κατωδιασχίσεις γιατί τότε θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει μια στρατιγική που να βγάλει κατά μέσο όρο αρνητικό μέσο κέρδος στα n βήματα του παιχνιδιού.

Απόδειξη. Εντοπίζουμε τις κατωδιασχίσεις της X. Έστω

$$\begin{aligned}
\tau_0 &:= 0,\\
\sigma_r &:= \inf\{k \geqslant \tau_{r-1} : X_k \geqslant b\},\\
\tau_r &:= \inf\{k \geqslant \sigma_r : X_k \leqslant a\}.
\end{aligned}$$

Τότε

$$D_n(a, b; X) = \sup\{r \in \mathbb{N} : \tau_r < \infty\}.$$

Ισχυρισμος 1: Οι $(\sigma_r)_{r\in\mathbb{N}^+}, (\tau_r)_{r\in\mathbb{N}}$ είναι χρόνοι διακοπής.
Το δείχνουμε επαγωγικά. Ο τ_0 σαφώς είναι χρόνος διακοπής. Έπειτα, για κάθε $r \in \mathbb{N}^+$ και $j \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\{\sigma_r \leqslant j\} &= \cup_{s=0}^{j}\{X_s \geqslant b, \tau_{r-1} \leqslant s\},\\
\{\tau_r \leqslant j\} &= \cup_{s=0}^{j}\{X_s \leqslant a, \sigma_r \leqslant s\}.
\end{aligned}$$

Αυτές οι σχέσεις από το ότι ο τ_{r-1} είναι χρόνος διακοπής δίνουν ότι οι σ_r, τ_r είναι χρόνοι διακοπής.
Άμεσα παίρνουμε ότι η $D_n(a, b; X)$ είναι μετρήσιμη γιατί για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\{D_n = k\} = \{\tau_k < \infty\} \cap \{\tau_{k+1} = \infty\} \in \mathcal{F}$ γιατί οι τ_k, τ_{k+1} είναι μετρήσιμες ως χρόνοι διακοπής.

Θεωρούμε τώρα τη διαδικασία πονταρίσματος που ποντάρει τις στιγμές που η X πραγματοποιεί κατωδιάσχιση. Αυτή είναι η $V := (V_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ με

$$V_i := \begin{cases} 1 & \text{αν } i \in (\sigma_r, \tau_r] \text{ για κάποιο } r \in \mathbb{N}^+,\\ 0 & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

Ισχυρισμος 2: Η $(V_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ είναι προβλέψιμη.
Πράγματι, για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ έχουμε

$$\{V_i = 1\} = \cup_{r=1}^{\infty}\{\sigma_r < i \leqslant \tau_r\} = \cup_{r=1}^{\infty}\{\sigma_r \leqslant i - 1\}\backslash\{\tau_r \leqslant i - 1\}.$$

Το τελευταίο σύνολο είναι στοιχείο της $\mathcal{F}_{i-1}$ γιατί οι σ_r, τ_r είναι χρόνοι διακοπής.
Έστω $N := D_n(a, b; X)$.
Ισχυρισμος 3: Ισχύει η εξής σχέση.

$$(V \cdot X)_n \leqslant -N(b-a) - (X_0 - b)^+ + (X_n - b)^+. \tag{1}$$

Πράγματι, το αριστερό μέλος ισούται με

$$\sum_{r=1}^{N} (X_{\tau_r} - X_{\sigma_r}) + \mathbf{1}_{\sigma_{N+1}<\infty}(X_n - X_{\sigma_{N+1}}).$$

• Αν $N \geqslant 1$, τότε $\mathbf{1}_{\sigma_{N+1}<\infty}(X_n - X_{\sigma_{N+1}}) \leqslant (X_n - b)^+$. Έπειτα, κάθε όρος στο άθροισμα είναι $\leqslant -(b-a)$. Αν όμως $X_0 > b$, τότε $\sigma_1 = 0$ και ο πρώτος όρος του αθροίσματος είναι $X_{\tau_1} - X_{\sigma_1} = X_{\tau_1} - b + b - X_0 \leqslant -(b-a) - (X_0 - b)^+$.
• Αν $N = 0$ και $X_0 \geqslant b$, τότε $(V \cdot X)_n = X_n - X_0 = X_n - b - (X_0 - b) \leqslant (X_n - b)^+ - (X_0 - b)^+$, ενώ αν $N = 0$ και $X_0 < b$, τότε $(V \cdot X)_n = \mathbf{1}_{\sigma_{N+1}<\infty}(X_n - X_{\sigma_{N+1}}) \leqslant (X_n - b)^+$. Άρα ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Επειδή η X είναι submartingale και η V προβλέψιμη μη αρνητική φραγμένη ανέλιξη, έχουμε ότι η $((V \cdot X)_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ είναι submartingale. Άρα το αριστερό μέλος της (1), επομένως και το δεξί, έχει μη αρνητική μέση τιμή. Έτσι παίρνουμε τη ζητούμενη. □

Λήμμα 1. *Έστω $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αν $D_\infty(a, b; Y) < \infty$ για κάθε $a, b \in \mathbb{Q}$ με $a < b$ τότε το όριο $\lim_{n\to\infty} Y_n$ υπάρχει στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το όριο δεν υπάρχει. Τότε $m := \underline{\lim}_{n\to\infty} Y_n < \overline{\lim}_{n\to\infty} Y_n =: M$. Βρίσκουμε δύο ρητούς a, b με $m < a < b < M$. Από αυτή την επιλογή, πρέπει $D_\infty(a, b; Y) = \infty$, που είναι αδύνατο από την υπόθεση. □

Θεώρημα 1 (Το θεώρημα σύγκλισης των martingales)**.** *Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ submartingale με $M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{E}(X_n^+) < \infty$. Τότε με πιθανότητα 1 το όριο $\lim_{n\to\infty} X_n =: X_\infty$ υπάρχει και ικανοποιεί $\boldsymbol{E}|X_\infty| < \infty$ (επομένως, με πιθανότητα 1, το όριο είναι πραγματικός αριθμός).*

Απόδειξη. Για κάθε $a, b \in \mathbb{Q}$ με $a < b$ η Πρόταση 1 δίνει ότι

$$\mathbf{E}\{D_\infty(a, b, X)\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\{D_\infty(a, b, X)\} \leqslant \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}\{(X_n - b)^+\}}{b-a} \leqslant \frac{|b| + M}{b-a} < \infty.$$

Έστω $\Omega_{a,b} \subset \Omega$ ένα σύνολο πιθανότητας 1 στο οποίο ισχύει $D_\infty(a, b, X) < \infty$. Το $\Omega_0 := \cap_{a,b\in\mathbb{Q},a<b}\Omega_{a,b}$ έχει πιθανότητα 1 και για $\omega \in \Omega_0$ παίρνουμε από το Λήμμα 1 ότι το όριο $\lim_{n\to\infty} X_n$ υπάρχει και είναι στοιχείο του $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Για την ολοκληρωσιμότητα του ορίου, επειδή η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι submartingale, έχουμε

$$\mathbf{E}(X_n^-) = \mathbf{E}(X_n^+) - \mathbf{E}(X_n) \leqslant \mathbf{E}(X_n^+) - \mathbf{E}(X_0) \leqslant M - \mathbf{E}(X_0),$$

άρα $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}(X_n^-) < \infty$. Έπειτα, το λήμμα Fatou δίνει $\mathbf{E}(X_\infty^+) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n^+) < \infty$ και όμοια $\mathbf{E}(X_\infty^-) < \infty$. □

Πόρισμα 1. *Έστω $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ μη αρνητικό supermartingale. Τότε το $\lim_{n\to\infty} Y_n := Y_\infty$ υπάρχει και $\boldsymbol{E}Y_\infty \leqslant \boldsymbol{E}Y_0$.*

Απόδειξη. Η ανέλιξη $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $W_n = -Y_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι submartingale και $\sup_n \mathbf{E}W_n^+ = 0 < \infty$. Άρα, από το Θεώρημα 1, το $\lim_{n\to\infty} W_n$ υπάρχει με πιθανότητα 1 και παίρνει τιμές στο $(-\infty, 0]$. Αν το ονομάσουμε $-Y_\infty$, τότε $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} Y_n = Y_\infty) = 1$.
Επίσης, αφού $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι supermartingale, έχουμε $\mathbf{E}Y_{n+1} \leqslant \mathbf{E}Y_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα, από το λήμμα Fatou,

$$\mathbf{E}Y_\infty = \mathbf{E}\big(\lim_{n\to\infty} Y_n\big) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{E}Y_n \leqslant \mathbf{E}Y_0,$$

που είναι το ζητούμενο. □

Πρόταση 2. *Έστω X τ.μ. με $\mathbf{E}|X| < \infty$ και $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ διήθηση. Θέτουμε $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n)$. Τότε, $\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}_\infty)$ σχεδόν βέβαια και στον L^1.*

Απόδειξη. Θέτουμε $X_n = \mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$. Η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ είναι martingale και

$$\mathbf{E}|X_n| = \mathbf{E}\big(|\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}_n)|\big) \leqslant \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(|X| \mid \mathcal{F}_n)\big) = \mathbf{E}|X| < \infty$$

Συνεπώς, $\sup_{n\in\mathbb{N}^+} \mathbf{E}|X_n| < \infty$, και από Θεώρημα 1 παίρνουμε ότι $X_n \overset{as}{\to} X_\infty$ για κάποια τ.μ. X_∞ με $\mathbf{E}|X_\infty| < \infty$.

Ισχυρισμος 1: $X_n \overset{L^1}{\to} X_\infty$ για $n \to \infty$.

Αν $X \geqslant 0$, τότε το συμπέρασμα έπεται από το λήμμα Scheffe γιατί $X_n \overset{as}{\to} X_\infty$ και $\mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(X_\infty) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Στη γενική περίπτωση, εφαρμόζουμε αυτό το επιχείρημα στις X^-, X^+.

Ισχυρισμος 2: $X_\infty = \mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}_\infty)$.

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbf{E}(1_A X_\infty) = \mathbf{E}(1_A X) \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{F}_\infty \tag{2}$$

Η παραπάνω ισότητα ισχύει για $A \in \mathcal{F}_{n_0}$ (n_0 σταθερό) γιατί για $n > n_0$ θα έχουμε $\mathbf{E}(1_A X_n) = \mathbf{E}(1_A X)$, και παίρνοντας $n \to \infty$ σε αυτή τη σχέση, αφού $1_A X_n \overset{L^1}{\to} 1_A X_\infty$, έχουμε τη ζητούμενη.

Έπειτα, δείχνουμε τη (2) στην περίπτωση που η X παίρνει τιμές στο $[0,\infty)$. Οι συναρτήσεις $\mu, \nu : \mathcal{F} \to [0,\infty)$ με $\mu(A) = \mathbf{E}(1_A X_\infty)$ και $\nu(A) = \mathbf{E}(1_A X)$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$ είναι πεπερασμένα μέτρα που συμφωνούν στην $C = \cup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n$, η οποία είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, $\mu(\Omega) = \nu(\Omega) = \mathbf{E}(X)$, και $\sigma(C) = \mathcal{F}_\infty$. Κατά τα γνωστά τα μ και ν συμφωνούν στην $\mathcal{F}_\infty$, που σημείνει ότι ισχύει η (2), και επομένως δείχθηκε σε αυτή την περίπτωση ο ισχυρισμός. Αν η X παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$, τότε $X_\infty = X_\infty^+ - X_\infty^- = \mathbf{E}(X^+ \mid \mathcal{F}) - \mathbf{E}(X^- \mid \mathcal{F}) = \mathbf{E}(X \mid \mathcal{F})$. □

Πρόταση 3. *Έστω $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ martingale. Τότε, Y_n συγκλίνει στον L^1 αν και μόνο αν $Y_n = \mathbf{E}(Z \mid \mathcal{F}_n)$ για κάποια τ.μ. Z με $\mathbf{E}|Z| < \infty$.*

Απόδειξη. $(\Leftarrow)$: Το είδαμε πιο πριν.

$(\Rightarrow)$: Επειδή η $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ συγκλίνει, έστω στην Y_∞, στον L^1 έπεται ότι $\mathbf{E}|Y_n| \to \mathbf{E}|Y_\infty|$. Άρα $\sup_{n\geqslant 1} \mathbf{E}|Y_n| < \infty$, και συνεπώς (από το θεώρημα σύγκλισης των martignales) η $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ συγκλίνει σχεδόν βέβαια σε μία τυχαία μεταβλητή που προφανώς είναι η Y_∞.

Θέτουμε $Z = Y_\infty$. Θα δείξουμε ότι $Y_{n_0} = \mathbf{E}(Y_\infty \mid \mathcal{F}_{n_0})$, δηλαδή

$$\mathbf{E}(Y_{n_0} 1_A) = \mathbf{E}(Y_\infty 1_A) \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{F}_{n_0}.$$

Πράγματι, για $A \in \mathcal{F}_{n_0}$, επειδή $\mathbf{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_{n_0}) = Y_{n_0}$ για $n > n_0$, έχουμε

$$\mathbf{E}(Y_\infty 1_A) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(Y_n 1_A) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\{\mathbf{E}(Y_n 1_A \mid \mathcal{F}_{n_0})\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\{1_A \mathbf{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_{n_0})\} = \mathbf{E}(Y_{n_0} 1_A). \tag{3}$$

□

2. Εφαρμογες

Εφαρμογή 1. [Κάλπη Pólya] Συνεχίζουμε το Παράδειγμα 3.5. Κάλπη έχει αρχικά a λευκές και μ μαύρες σφαίρες. A_n (αντίστοιχα, B_n) είναι το πλήθος των λευκών (αντίστοιχα, μαύρων) σφαιρών μετά από n εξαγωγές. $X_n := A_n/(A_n + B_n)$ είναι το ποσοστό των λευκών σφαιρών στην κάλπη μετά από n εξαγωγές. Η ανέλιξη $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ είναι martingale με $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}(X_n^+) \leqslant 1$. Επομένως το Θεώρημα 1 εφαρμόζεται. Ας ονομάσουμε X_∞ την οριακή τυχαία μεταβλητή.

Ισχυρισμος[1]: $X_\infty \sim B(a,\mu)$.

Δηλαδή η X_∞ έχει πυκνότητα

$$\frac{1}{B(a,\mu)}\, x^{a-1}\, (1-x)^{\mu-1}\, \mathbf{1}_{(0,1)}(x). \tag{4}$$

[1]Το $B(a,\mu)$ συμβολίζει την κατανομή Βήτα με παραμέτρους a,μ αλλά και την τιμή της συνάρτησης Βήτα στο (a,μ).

Πριν το αποδείξουμε, παρατηρήστε ότι ο τύπος συμφωνεί με τη διαίσθησή μας. Αν το a είναι μεγάλο, τότε ο παράγοντας x^{a-1} μικραίνει όταν το x είναι κοντά στο 0. Είναι λογικό, a μεγάλο κάνει απίθανο η οριακή αναλογία λευκών σφαιριδίων να είναι μικρή.

Τώρα στην απόδειξη. Ορίζουμε $\tilde{A}_n := A_n - a$, δηλαδή το πόσες φορές στις εξαγωγές $1, 2, \ldots, n$ βγήκε λευκή σφαίρα. Τότε για $k = 0, 1, \ldots, n$ έχουμε

$$\mathbf{P}(\tilde{A}_n = k) = \binom{n}{k} \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)\mu(\mu+1)\cdots(\mu+n-k-1)}{(a+\mu)(a+\mu+1)\cdots(a+\mu+n-1)} \tag{5}$$

$$= \frac{(a+k-1)!(\mu+n-k-1)!}{(a+\mu+n-1)!} \frac{(a+\mu-1)!}{(a-1)!(\mu-1)!} \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{6}$$

$$= \frac{1}{B(a,\mu)} \frac{(k+a-1)_{a-1}(n-k+\mu-1)_{\mu-1}}{(n+a+\mu-1)_{a+\mu-1}}. \tag{7}$$

[Η πρώτη ισότητα θέλει εξήγηση, οι άλλες είναι άλγεβρα. Για να έχουμε ακριβώς k εξαγωγές λευκών σφαιριδίων, υπάρχουν $\binom{n}{k}$ σενάρια, δηλαδή σημειώνουμε σε ποιες k από τις n εξαγωγές βγήκε λευκό σφαιρίδιο. Κάθε ένα από αυτά τα σενάρια έχει την ίδια πιθανότητα, το κλάσμα που ακολουθεί τον διωνυμικό συντελεστή. Γιατί η πιθανότητα κάθε σεναρίου είναι γινόμενο n όρων. Κάθε όρος είναι κλάσμα ευνοϊκών προς δυνατών περιπτώσεων για καθεμία από τις n εξαγωγές. Άσχετα από τις θέσεις εξαγωγής των λευκών σφαιριδίων, οι παρονομαστές αυτών των κλασμάτων είναι οι $a+\mu, a+\mu+1, \ldots, a+\mu+n-1$ αφού αυτό είναι το πλήθος των σφαιριδίων κατά τις n διαδοχικές εξαγωγές. Έπειτα στον αριθμητή, ο όρος $a + \mu + j - 1$ είναι ο αριθμητής στο κλάσμα που δίνει την πιθανότητα επιλογής του j λευκού σφαιριδίου (ο παραρονομαστή εκείνου του κλάσματος εξαρτάται από τη θέση της εξαγωγής του j λευκού σφαιριδίου, αλλά δεν μας ενδιαφέρει). Αντίστοιχη ερμηνεία έχουν οι όροι της μορφής $(\mu + j - 1)$ με $j = 1, 2, \ldots, n-k$.]

Θα εφαρμόσουμε την άσκηση στο τέλος της παραγράφου αυτής για να δείξουμε ότι

$$\frac{\tilde{A}_n}{n} \Rightarrow Y \sim B(a,\mu). \tag{8}$$

Για $x \in [0,1]$, ο πιο πάνω υπολογισμός δίνει ότι

$$n\mathbf{P}(\tilde{A}_n = [nx]) = \frac{1}{B(a,\mu)} \frac{\frac{([nx]+a-1)_{a-1}}{n^{a-1}} \frac{(n-[nx]+\mu-1)_{\mu-1}}{n^{\mu-1}}}{\frac{(n+a+\mu-1)_{a+\mu-1}}{n^{a+\mu-1}}} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{B(a,\mu)} x^{a-1}(1-x)^{\mu-1}.$$

Για $x \in \mathbb{R} \backslash [0,1]$, έχουμε $n\mathbf{P}(\tilde{A}_n = [nx]) = 0$ για μεγάλα n. Η συνάρτηση $f(x) := \frac{1}{B(a,\mu)} x^{a-1}(1-x)^{\mu-1}\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$ είναι μη αρνητική με ολοκλήρωμα 1. Είναι μάλιστα η πυκνότητα της κατανομής $B(a,\mu)$. Η άσκηση πιο κάτω δίνει την (8), και έπειτα, το θεώρημα Slutsky δίνει την $A_n/n \Rightarrow Y \sim B(a,\mu)$. Όμως $A_n/n \to X_\infty$ με πιθανότητα 1, άρα και κατά κατανομή. Από τη μοναδικότητα του κατά κατανομή ορίου, έχουμε ότι $X_\infty \overset{d}{=} Y$, και έτσι αποδείχθηκε ο αρχικός μας ισχυρισμός.

Εφαρμογή 2. [Ο νόμος 0-1 του Kolmogorov] Έστω $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές (Όλες έχουν κοινό πεδίο ορισμού, Ω, ενώ καθεμία X_i μπορεί να παίρνει τιμές σε κάποιο μετρήσιμο χώρο S_i, διαφορετικό για καθεμία).

Γνωστές είναι οι σ-άλγεβρες

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n), \tag{9}$$

$$\mathcal{T}_n := \sigma(\{X_i : i \geqslant n+1\}) \tag{10}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ και οι

$$\mathcal{F}_\infty := \sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n), \tag{11}$$

$$\mathcal{T}_\infty := \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n. \tag{12}$$

Θεωρούμε $A \in \mathcal{T}_\infty$ και θα δείξουμε ότι $\mathbf{P}(A) = 0$ ή $\mathbf{P}(A) = 1$. Με βάση την Πρόταση 2,

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_n) \stackrel{n\to\infty}{\to} \mathbf{E}(\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_\infty) = \mathbf{1}_A \tag{13}$$

με πιθανότητα 1. Η ισότητα στο δεξί μέλος ισχύει γιατί $A \in \mathcal{F}_\infty$. Επειδή το A είναι ανεξάρτητο από την $\mathcal{F}_n$, το αριστερό μέλος ισούται με $\mathbf{P}(A)$ για κάθε n. Επομένως έχουμε $\mathbf{P}(A) = \mathbf{1}_A$ με πιθανότητα 1. Αν $\mathbf{P}(A) > 0$, τότε η προηγούμενη ισότητα ισχύει για τουλάχιστον ένα $\omega \in \Omega$ και δίνει ότι $\mathbf{P}(A) = 1$.

Εφαρμογή 3. Έστω $(X_n)_{n\geqslant 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p, \mathbf{P}(X_1 = -1) = 1-p =: q$ με $p > q$. Θέτουμε $S_0 = 0$ και $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ για κάθε $n \geqslant 1$. Θα δείξουμε με χρήση του Θεωρήματος 1 ότι $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ με πιθανότητα 1. (Βέβαια, άμεση απόδειξη μπορούμε να έχουμε από τον νόμο των μεγάλων αριθμών.)
Η ανέλιξη $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ με $Y_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση που παράγει η $(X_n)_{n\geqslant 1}$ και $Y_n > 0$ για κάθε $n \geqslant 0$. Άρα, με πιθανότητα 1, το όριο $Y := \lim_{n\to\infty} Y_n$ υπάρχει και $\mathbf{E}Y < \infty$. Έστω $r := q/p \in (0, 1)$. Έχουμε ότι $Y_n \in \{r^k : k \in \mathbb{Z}\} =: A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οποιαδήποτε ακολουθία παίρνει τιμές στο A και συγκλίνει (με ενδεχόμενο όριο το ∞) μπορεί να συγκλίνει σε στοιχείο του A στο ∞ ή στο 0. Το πρώτο σενάριο αποκλείεται γιατί όλα τα σημεία του A είναι μεμονωμένα και η Y_n δεν είναι σταθερή ακολουθία, ενώ το δεύτερο σενάριο αποκλείεται αφού $\mathbf{E}Y < \infty$. Άρα $1 = \mathbf{P}(Y = 0) = \mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty)$.

Άσκηση (εκτός ύλης). Έστω $(A_n)_{n\geqslant 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{Z}$. Συμβολίζουμε με f_n τη συνάρτηση πιθανότητας της A_n, δηλαδή $f_n(x) := \mathbf{P}(A_n = x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n f_n([nx]) = f(x) \tag{14}$$

Lebesgue-σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπου $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ είναι μια Lebesgue-μετρήσιμη συνάρτηση με $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$. Έστω X τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα f. Τότε

$$\frac{A_n}{n} \Rightarrow X \tag{15}$$

καθώς $n \to \infty$ (σύγκλιση κατά κατανομή).

3. Ασκησεις

1. Έστω $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ ανεξάρτητες τ.μ. με

$$Z_n = \begin{cases} -a_n, & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{2n^2} \\ 0, & \text{με πιθανότητα } 1 - \frac{1}{n^2} \\ a_n, & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{2n^2} \end{cases}$$

όπου $a_1 = 2$, $a_n = 4\,(a_1 + \ldots + a_{n-1})$. Να αποδειχθούν τα παρακάτω:
(α) Η $Y_n = Z_1 + \ldots + Z_n$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ με $\mathcal{F}_n := \sigma(\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$.
(β) Το $\lim_{n\to\infty} Y_n$ υπάρχει με πιθανότητα 1.
(γ) $\sup_{n\geqslant 1} \mathbf{E}|Y_n| = +\infty$.

2. Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ submartingale. Να δειχθεί ότι τα εξής είναι ισοδύναμα.
(α) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}(X_n^+) < \infty$,
(β) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}|X_n| < \infty$,
(γ) $\varliminf_{n\to\infty} \mathbf{E}|X_n| < \infty$,
(δ) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n^+)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο,
(ε) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}|X_n|$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο.

Λύσεις των ασκήσεων

1. (α) Επειδή $\mathbf{E}Z_n = 0$, προκύπτει εύκολα το ζητούμενο.
(β) Έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(Z_n \neq 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\mathbf{P}(Z_n = a_n) + \mathbf{P}(Z_n = -a_n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

και από το πρώτο λήμμαBorel-Cantelli παίρνουμε $\mathbf{P}\big(\limsup_{n\geqslant 1}\{Z_n \neq 0\}\big) = 0$ και άρα το $\lim_{n\to\infty} Y_n$ υπάρχει με πιθανότητα 1.
(γ) Έχουμε $a_2 = 8$, $a_3 = 40 = 8 \cdot 5$, $\ldots$, $a_n = 8 \cdot 5^{n-2}$ για κάθε $n \geqslant 2$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{E}|Y_n| &\geqslant a_n \mathbf{P}(Z_n = a_n, Z_{n-1} = 0, \ldots, Z_2 = 0, Z_1 = a_1)\\ &\geqslant 8 \cdot 5^{n-2} \frac{1}{2n^2}\Big(1 - \frac{1}{(n-1)^2}\Big)\Big(1 - \frac{1}{(n-2)^2}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{1}{2^2}\Big)\frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty\end{aligned}$$

γιατί το γινόμενο των παρενθέσεων συγκλίνει σε θετικό αριθμό[2]. Συνεπώς $\sup_{n\geqslant 1} \mathbf{E}|Y_n| = \infty$.

2. (α) $\Rightarrow$ (β) Έχουμε ότι $|X_n| = 2X_n^+ - X_n$ και η $\mathbf{E}X_n$ είναι αύξουσα γιατί η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι submartingale. Αρα $\mathbf{E}|X_n| \leqslant \mathbf{E}(X_n^+) - \mathbf{E}(X_0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(β) $\Rightarrow$ (γ) Προφανές.
(γ) $\Rightarrow$ (δ) Η $(X_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι submartingale γιατί η $x \mapsto x^+$ είναι αύξουσα και κυρτή, άρα η $(\mathbf{E}(X_n^+))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα. Μένει να δείξουμε ότι είναι φραγμένη. Έστω $M := \underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{E}|X_n| < \infty$. Για άπειρα n θα έχουμε $\mathbf{E}(X_n^+) \leqslant \mathbf{E}|X_n| < M + 1$, το οποίο μαζί με τη μονοτονία της $(\mathbf{E}(X_n^+))_{n\in\mathbb{N}}$ δίνει το ζητούμενο.
(δ) $\Rightarrow$ (ε) Εφόσον $|X_n| = 2X_n^+ - X_n$, μένει να δείξουμε ότι το $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X_n$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Αυτό έπεται από το ότι η $(\mathbf{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και ανω φραγμένη (από το ότι $X_n \leqslant X_n^+$ και την υπόθεση).
(ε) $\Rightarrow$ (α) Η υπόθεση δίνει ότι η $(\mathbf{E}|X_n|)_{n\in\mathbb{N}^+}$ είναι φραγμένη. Έπειτα παρατηρούμε ότι $x^+ \leqslant \|x|$ για κάθε πραγματικό x.

[2] Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε ακολουθία $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ αριθμών του $(0,1)$, έχουμε $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - c_n) > 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$.

Πρόταση 4. *Έστω $X := (X_1, X_2, \ldots, X_d)^t$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στον $\mathbb{R}^d$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η X είναι Γκαουσιανή.*

(β) *Για κάθε $u \in \mathbb{R}^d$ η τυχαία μεταβλητή $u_1X_1 + \cdots + u_dX_d (= \langle u, X\rangle)$ είναι κανονική.*

(γ) *Υπάρχουν $b \in \mathbb{R}^d$ και $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$ (συμμετρικός) θετικά ημιορισμένος πίνακας ώστε η χαρακτηριστική συνάρτηση της X να γράφεται*

$$\phi_X(u) := \boldsymbol{E}(e^{i\langle u,X\rangle}) = \exp\left\{i\langle u, b\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Cu\rangle\right\} \tag{16}$$

για κάθε $u \in \mathbb{R}^d$.

Προοφ. (α) $\Rightarrow$ (β). Από τη γραφή για την X, έπεται ότι η $\langle u, X\rangle$ είναι γραμμικός συνδυασμός ανεξάρτητων κανονικών (μονοδιάστατων) τυχαίων μεταβλητών, άρα κανονική.

(β) $\Rightarrow$ (γ). Έχουμε ότι κάθε X_j έχει πεπερασμένη δεύτερη ροπή. Έστω $b := (\mathbf{E}(X_1), \cdots, \mathbf{E}(X_d))^t$ και $C := (C_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ ο πίνακας με $C_{i,j} := \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ για κάθε $1 \leqslant i, j \leqslant d$. Η χαρακτηριστική συνάρτηση της X στο αυθαίρετο $u \in \mathbb{R}^d$ ισούται με

$$\mathbf{E}(e^{i\langle u,X\rangle}) = e^{i\,\mathbf{E}\langle u,X\rangle - \frac{1}{2}\mathrm{Var}(\langle u,X\rangle)}$$

γιατί είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της κανονικής τυχαίας μεταβλητής $\langle u, X\rangle$ υπολογισμένη στο 1. Αυτή η τυχαία μεταβλητή έχει μέση τιμή $\langle u, b\rangle$ και διασπορά $\sum_{i,j} u_iu_jC_{i,j} = \langle u, Cu\rangle$. Έτσι παίρνουμε την (16). Ο πίνακας C είναι συμμετρικός (προφανώς) και θετικά ημιορισμένος γιατί για κάθε $u \in \mathbb{R}^d$ έχουμε $\langle u, Cu\rangle = \mathrm{Var}(\langle u, X\rangle) \geqslant 0$.

(γ) $\Rightarrow$ (α). Υπάρχει στις σημειώσεις (Θεώρημα Α′.4 στο Παράρτημα Α′). □

Άμεση απόδειξη του (γ) $\Rightarrow$ (β). Αν η X είναι Γκαουσιανή και $u \in \mathbb{R}^d$, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση της $u \cdot X$ στο οποιοδήποτε $t \in \mathbb{R}$ ισούται με

$$\mathbf{E}(e^{it\langle u,X\rangle}) = e^{i\langle tu,b\rangle - \frac{1}{2}\langle tu,tCu\rangle} = e^{it\langle u,b\rangle - \frac{1}{2}t^2\langle u,Cu\rangle}.$$

Επομένως η $\langle u, X\rangle$ είναι κανονική με μέση τιμή $\langle u, b\rangle$ και διασπορά $\langle u, Cu\rangle$. Η τελευταία ποσότητα είναι στοιχείο του $[0, \infty)$ γιατί ο C είναι θετικά ημιορισμένος.