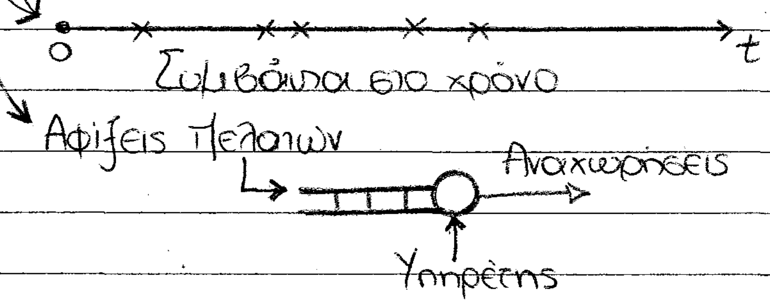
Μάθημα: 1ο   12/3/2012

- Eclass: θα ανεβαίνουν ασκήσεις και σημειώσεις από τις διαλέξεις.
- Βιβλίο: Φακίνος (Κεφ. 2,3 και μέρος του 6).
  Kulkarni (Κεφ 5, 8 και μέρος του 7.)
- Ασκήσεις: 50 Ασκήσεις (Φακίνος)
  60 » Φυλλάδια E-class (12 φυλλ x5)

Μέρη Ύλης: - Στοχαστική Διαδικασία Poisson
- Ανανεωτική Θεωρία
- Εισαγωγή στις Ουρές Αναμονής



Επανάληψη στις Πιθανότητες I (για αυτό το μάθημα + το επόμενο)

① Δεσμευμένη Μέση Τιμή

(X,Y) : ζεύγος τ.μ.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$: δεσμευμένη συνάρτηση πιθ. (διακριτές)
συνάρτηση πυκν./πιθ. (συνεχείς)

$$E[X|Y=y] = m_{X|Y}(y) = \begin{cases} \sum_x x \cdot f_{X/Y}(x|y), & X \text{ διακρ.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\, dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

$E[X|Y=y]$: μέση τιμή της X δοθέντος ότι $Y=y$
: αριθμός που εξαρτάται από το y.

$E[X|Y] = m_{X|Y}(Y)$: μέση τιμή της X δοθείσης της Y
τυχαία μεταβλητή κ' η καλύτερη συν/ση
της Y που προσεγγίζει τη X

② Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής

$$E[X] = E[E[X|Y]] = E[m_{X|Y}(Y)] = \begin{cases} \sum_y m_{X|Y}(y) f_Y(y), & Y \text{ διακρ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} m_{X|Y}(y) \cdot f_Y(y), & Y \text{ συν.} \end{cases}$$

όπου $m_{X|Y}(y) = E[X/Y=y]$.

③ Παράδειγμα

Τυχαίο Πείραμα: 1) Ρίχνω ζάρι
2) Ρίχνω νόμισμα τόσες φορές όσες δείχνει το ζάρι.

Ζάρι ⇝ συνηθ. / Νόμισμα → Κεφ. p, → Γραμμ. $1-p$

$X = \#$ κεφαλών
$E[X] = ;$ Y : αποτελ. ζαριού

Απ: $E[X] = E[E[X|Y]]$ **(1)**
$E[X|Y=y] = y \cdot p$
$(X|Y=y) \sim Bin(y, p)$, όπου y: αριθμ. πειραμ.
p: πιθ. επιτυχίας

$$E[X] = \sum_{y=1}^{6} E[X/Y=y] \cdot f_X(y) = \sum_{y=1}^{6} y \cdot p \cdot \frac{1}{6} = \frac{p}{6} \sum_{y=1}^{6} y = \frac{p}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6} \cdot 7}{2} = \frac{7p}{2}.$$

④ Παράδειγμα

Φυλακισμένος: Διαλέγει πόρτα στην τύχη
1 → Άμεση ελευθερία
2 → Πίσω στο κελί μετά από 1 μέρα
3 → » » » » » 4 μέρες

$E[X] = ;$

Απ: Y: η πρώτη επιλογή πόρτας , X: # μερών μέχρι την ελευθερία

$$E[X|Y=y] = \begin{cases} 0 & , y=1 \\ 1+E[X] & , y=2 \\ 4+E[X] & , y=3 \end{cases}$$

$$E[X] = \sum_{y=1}^{3} E[X|Y=y]\cdot f_Y(y) = 0\cdot f_Y(1) + (1+E[X])\cdot f_Y(2) + (4+E[X])\cdot f_Y(3) \Rightarrow$$

$$E[X] = (1+E[X])\cdot\frac{1}{3} + (4+E[X])\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{3} + \frac{2}{3}E[X] \Rightarrow \underline{E[X]=5}$$

5 Παράδειγμα

Τυχαίο Πείραμα: ρίψη νομίσματος $\to$ επιτ. με πιθ. p; $\to$ αποτ. >> $1-p$

X = # πειραμάτων μέχρι την 1η επιτυχία

$E[X]$ = ; (μέση τιμή γεωμετρικής κατανομής).

Απ: Κλασικός Υπολογισμός: $f_X(x) = P(X=x) = (1-p)^{x-1}p$, $x=1,2,\dots$

$$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x\cdot f_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x\cdot(1-p)^{x-1}p = ;$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} t^x = \frac{1}{1-t} \xRightarrow{d/dt} \sum_{x=1}^{\infty} x\cdot t^{x-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \xRightarrow{t=1-p} \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} = \frac{1}{p^2}$$

$$\xRightarrow{\cdot p} E[X] = \frac{1}{p}.$$

Με θεώρημα ολικής μ.τ.: $f_X(x) = P(X=x) = (1-p)^{x-1}\cdot p$, $x=1,2,\dots$

$E[X]$ = ;

Y: αποτελ. της 1ης ρίψης $\to$ 0 αποτυχ.; $\to$ 1 επιτυχία

$E[X|Y=0] = 1+E[X]$

$E[X|Y=1] = 1$

$$E[X] = \sum_{y=0}^{1} E[X|Y=y]\cdot f_Y(y) = (1+E[X])(1-p) + 1\cdot p =$$

$$= 1 + (1-p)\cdot E[X] \Rightarrow \underline{E[X] = \frac{1}{p}}$$

6 Παράδειγμα

$X \sim Exp(\lambda)$, Χρόνος ζωής ενός εξαρτήματος

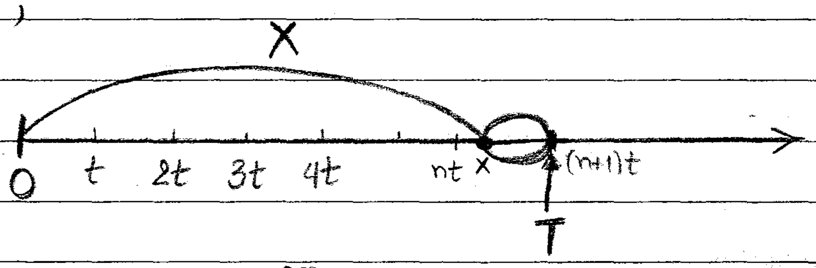
$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, $x > 0$

Επιθεωρητής ελέγχει το εξάρτημα κάθε t χρονικές μονάδες

T = χρονική στιγμή που το εξάρτημα ανακαλύπτεται χαλασμένο

$E[T] = ;$

Απ:



$$E[T] = E[E[T/X]] = \int_0^{\infty} E[T/X=x] \cdot f_X(x)\,dx$$

$$E[T/X=x] = (n+1)t, \quad \text{αν } nt \le x < (n+1)t$$

$$E[T] = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nt}^{(n+1)t} E[T/X=x] f_X(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nt}^{(n+1)t} (n+1)t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t \cdot \lambda \int_{nt}^{(n+1)t} e^{-\lambda x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t \left[-e^{-\lambda x}\right]_{nt}^{(n+1)t} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t \left(e^{-\lambda nt} - e^{-\lambda (n+1)t}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t e^{-\lambda nt} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t e^{-\lambda \overbrace{(n+1)}^{=m} t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\cancel{n}+1)t \cdot e^{-\lambda nt} - \sum_{m=1}^{\infty} \cancel{m t e^{-\lambda m t}} \qquad (\text{αλλάζω το } m \text{ με } n)$$

$$= t \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda nt} = t \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\lambda t})^n = t \cdot \frac{1}{1 - e^{-\lambda t}}$$

Παρατηρώ ότι $\lim_{t \to 0} E[T] = \frac{1}{\lambda} = E[X]$, όπως αναμενόταν!

7 Παράδειγμα

Οι A και B μονομαχούν
Ευστοχία του $A = 1/3$
» του $B = 3/4$
Ρίχνουν εναλλάξ.

α) Ποιο είναι το "πλεονέκτημα πρώτου χτυπήματος" για τον A;
β) $E[$ # βολών μέχρι να χτυπηθεί ένας από τους δύο / ξεκινάει ο $i] = ;$, $i = A, B$

Υπόδειξη

α) Για να υπολογίσουμε το "πλεονέκτημα" θα πάρουμε το λόγο

$$\frac{P(\text{επιβ. ο } A \mid \text{ξεκίνησε ο } A)}{P(\text{επιβ. ο } A \mid \text{ξεκίνησε ο } B)}$$

το οποίο υπολογίζεται με θεώρημα ολικής πιθανότητας.
β) Θα υπολογιστεί με το θεώρημα διπλής μέσης τιμής.