Μάθημα: 5ο 26/3/2012

Βασικοί Υπολογισμοί στη Στοχαστική Διαδικασία Poisson

① Παράδειγμα 1

Έστω ότι σε ένα μαιευτήριο οι γεννήσεις συμβαίνουν σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό 10 γεννήσεις τη μέρα.

i) Ποια η πιθανότητα να γεννηθούν 10 παιδιά την 1η Απριλίου;

ii) Ποια η » » » 10 παιδιά την 1η Απριλίου δεδομένου ότι γεννήθηκαν 8 παιδιά στις 31 Μαρτίου.

iii) Ποια η » » » 10 παιδιά την 1η Απριλίου δεδομένου ότι γεννήθηκαν 40 παιδιά 1η – 6η Απριλίου;

iv) Ποια η » » » 20 παιδιά στο διάστημα 1η – 2α Απριλίου κ' 5 παιδιά στο διάστημα 2α – 3η Απριλίου

Απ.: $\{N(t)\}$ η σ.δ. Poisson που περιγράφει τις γεννήσεις t σε μέρες $\lambda = 10$.

i) $$P(\underbrace{N(1)}_{t} = \underbrace{10}_{n}) = e^{-\overset{\lambda}{10}\cdot \overset{t}{1}} \frac{(\overbrace{10\cdot 1}^{\lambda t})^{10 = n}}{\underset{n}{10}!}$$

ii) $$P(N(2)-N(1)=10 \mid N(1)=8) \overset{\text{ανεξ.}}{\underset{\text{προσαυξ.}}{=}} P(N(2)-N(1)=10) \overset{\text{ομογ.}}{\underset{\text{προσαυξ.}}{=}}$$

$$= P(N(1)=10) = e^{-10}\frac{10^{10}}{10!}$$

iii)

1η 2η 3η 4η 5η 6η

$$P(N(1)=10 \mid N(6)=40) = \frac{P(N(1)=10,\, N(6)=40)}{P(N(6)=40)} =$$

$$= \frac{P(N(1)=10,\, N(6)-N(1)=30)}{P(N(6)=40)} \overset{\text{ανεξ.}}{\underset{\text{προσαυξ.}}{=}}$$

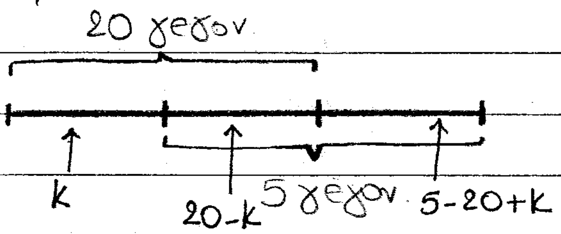
$$= \frac{P(N(1)=10)\,P(N(6)-N(1)=30)}{P(N(6)=40)} \overset{\text{ομογ.}}{\underset{\text{προσαυξ.}}{=}}$$

$$= \frac{P(N(1)=10)\cdot P(N(5)=30)}{P(N(6)=40)} =$$

$$= \frac{\cancel{e^{-10\cdot 1}} \cdot \frac{(10\cdot 1)^{10}}{10!} \cdot \cancel{e^{-10\cdot 5}} \cdot \frac{(10\cdot 5)^{30}}{30!}}{\cancel{e^{-10\cdot 6}} \cdot \frac{(10\cdot 6)^{40}}{40!}} =$$

$$= \binom{40}{10} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \left(\frac{5}{6}\right)^{30}$$

iv) $P(N(2)=20,\ N(3)-N(1)=5)$ (1)



$$(1) = \sum_k P(N(1)=k,\ N(2)=20,\ N(3)-N(1)=5) =$$

$$= \sum_k P(N(1)=k,\ N(2)-N(1)=20-k,\ N(3)-N(2)=k-15) \overset{\text{ανεξ.}}{\underset{\text{προσαυ.}}{=}}$$

$$= \sum_k P(N(1)=k) \cdot P(N(2)-N(1)=20-k)\, P(N(3)-N(2)=k-15) \overset{\text{στασ.}}{\underset{\text{προσαυξ.}}{=}}$$

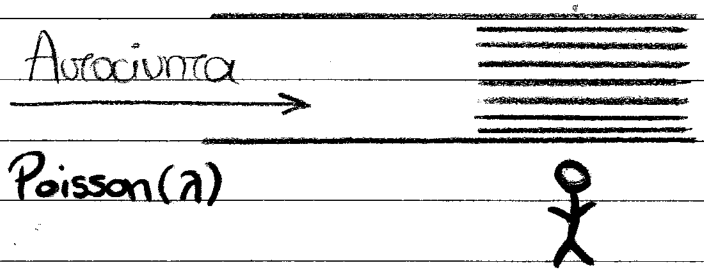
$$= \sum_k P(N(1)=1) \cdot P(N(1)=20-k) \cdot P(N(1)=k-15) =$$

$$= \sum_{k=15}^{20} e^{-10} \frac{10^k}{k!}\, e^{-10} \cdot \frac{10^{20-k}}{(20-k)!} \cdot e^{-10} \cdot \frac{10^{k-15}}{(k-15)!} =$$

$$= e^{-30} \sum_{k=15}^{20} \frac{10^{5+k}}{k!\,(20-k)!\,(k-15)!}$$

2 Παράδειγμα 2

Σε μια διάβαση χωρίς φανάρι τα αυτοκίνητα περνάνε σύμφωνα με διαδικασία Poisson ρυθμού λ.



Πλάτος διάβασης = x μέτρα

Ταχύτητα του διαβάτη = u μέτρα/δευτερόλεπτο

Ο διαβάτης παρατηρεί τα αυτοκίνητα και περνά τη διάβαση αν προλαβαίνει να τη διασχίσει μέχρι το επόμενο αυτοκίνητο. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος μέχρι ν' αρχίσει τη διάβαση.

Απ: Έστω $t_0 = \frac{x}{u}$ ο χρόνος που απαιτείται για να διασχίσει τη διάβαση

Έστω X ο χρόνος μέχρι να αρχίσει τη διάσχιση της διάβασης

Έστω $T_1, T_2, T_3, \ldots$ οι χρόνοι μεταξύ των αυτοκινήτων που έρχονται όπου $T_i \sim Exp(\lambda)$ και T_i ανεξάρτητοι.

$E[X] = ;$

1η ΛΥΣΗ

$X = \sum_{i=1}^{N-1} T_i$, όπου $N = \min\{n \geq 1 : T_n > t_0\}$.

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{N-1} T_i\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N-1} T_i / N\right]\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{N-1} T_i / N=n\right] \cdot P(N=n) \quad (1)$$

Έχω: • $P(N=n) = P(T_1 \leq t_0, T_2 \leq t_0, \ldots, T_{n-1} \leq t_0, T_n > t_0) =$

$$= (1-e^{-\lambda t_0})^{n-1} \cdot e^{-\lambda t_0}, \quad n \geq 1. \quad (2)$$

• $$E\left[\sum_{i=1}^{N-1} T_i / N=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1} T_i / N=n\right] = \sum_{i=1}^{n-1} E[T_i / N=n] \quad (3)$$

• $$\underset{1 \leq i \leq n-1}{E[T_i / N=n]} = E[T_i / T_1 \leq t_0, T_2 \leq t_0, \ldots, T_{n-1} \leq t_0, T_n > t_0]$$

$$\underset{T_1, T_2, \ldots \text{ ανεξ.}}{=} E[T_i / T_i \leq t_0] = \int_0^{t_0} t \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda t_0}} dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\lambda t_0}} \int_0^{t_0} \lambda t e^{-\lambda t} dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\lambda t_0}} \cdot \frac{1}{\lambda} \int_0^{t_0} \underbrace{\frac{\lambda^2}{(2-1)!} t^{2-1} e^{-\lambda t}}_{\text{πυκνότητα Gamma}(2,\lambda)} dt$$

Άρα $P(S_2 \leq t_0) = P(N(t_0) \geq 2) = 1 - P(N(t_0)=0) - P(N(t_0)=1)$

$$= 1 - e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 \cdot e^{-\lambda t_0}.$$

<u>Άρα</u>: $E[T_i \mid N=n] = \dfrac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 \cdot e^{-\lambda t_0}}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})}$ (4)

Επομένως από (1), (2), (3), (4) έχουμε:

$$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \frac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 \cdot e^{-\lambda t_0}}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})} P(N=n) =$$

$$= \frac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 \cdot e^{-\lambda t_0}}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})} \left(E(N)-1\right)$$

$$E[N] = \sum_{n=1}^{\infty} n \underbrace{\left(1-e^{-\lambda t_0}\right)}_{x}{}^{n-1} \underbrace{e^{-\lambda t_0}}_{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}(1-x) = \ldots = \frac{1}{1-x} =$$

$$= e^{\lambda t_0}$$

<u>Τελικά</u>: $E[X] = \dfrac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 \cdot e^{-\lambda t_0}}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})} \boxed{\left(e^{\lambda t_0}-1\right)} =$ $= e^{\lambda t_0}(1-e^{-\lambda t_0})$

$$= \frac{e^{\lambda t_0}-1}{\lambda} - t_0.$$

<u>2η ΛΥΣΗ</u>

$$E[X] = E[E[X \mid T_1]] = \int_0^{+\infty} E[X \mid T_1 = t] \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt$$

<u>Όμως</u>: $E[X \mid T_1 = t] = \begin{cases} 0 , & t > t_0 \\ t + E[X] , & t \le t_0 \end{cases}$

<u>Άρα</u>: $E[X] = \displaystyle\int_0^{t_0} (t + E(X)) \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt =$

$$= \underbrace{\int_0^{t_0} t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt}_{\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0})} + E[X] \cdot \underbrace{\int_0^{t_0} \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt}_{1-e^{-\lambda t_0}}$$

$$\Rightarrow E[X] \cdot e^{-\lambda t_0} = \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 \cdot e^{-\lambda t_0}) \Rightarrow E[X] = \frac{e^{\lambda t_0}-1}{\lambda} - t_0$$