Μάθημα: 9ο 23/4/2012

Διαδικασία Poisson και Γενικεύσεις της: Μη-ομογενής και Σύνθετη Διαδικασία Poisson

① Ιδιότητες Poisson (να τις ξέρουμε)

1) Ορσ. Ι : $X_1, X_2, \dots$ ανεξ. ς' ισόνομες $\sim Exp(\lambda)$

2) Ορσ. ΙΙ : Ανεξ + Ομογ. προσαυξ. + $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$

3) Ορσ. ΙΙΙ : Ανεξ. + Ομογ. προσαυξ. + $P(N(h)=j) = \begin{cases} 1-\lambda h + o(h), & j=0 \\ \lambda h + o(h), & j=1 \\ o(h), & j \geq 2 \end{cases}$

4) $S_n \sim Gamma(n, \lambda)$

5) $(S_1, S_2, \dots, S_n \mid N(t)=n) \stackrel{d}{=} (U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n})$,
$U_i \sim Unif[0,t]$

6) Υπέρθεση / Διάσπαση : $\underset{\lambda_1}{\{N_1(t)\}}$, $\underset{\lambda_2}{\{N_2(t)\}}$ ανεξ. Poisson $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{\lambda_1+\lambda_2}{\{N(t)\}}$ με $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ είναι Poisson

$\underset{\lambda}{\{N(t)\}}$ Poisson ς κάθε γεγονός καταγρ. με πιθ. $p(t)$ $\Rightarrow$ $N_1(t) = \#$ καταγεγρ. γεγον.

$$N_1(t) \sim Poisson(\Lambda(t)), \quad \Lambda(t) = \lambda \int_0^t p(u)\,du$$

$$\left(\text{Αν } p(t)=p \text{ τότε } N_1(t) \sim Poisson(\lambda p t) \right)$$

② Μη-ομογενής διαδικασία Poisson : Ορισμός

Μια διαδικασία $\{N(t)\}$ απαριθμήτρια γεγονότων (παίρνει διαδοχικά τις τιμές $0, 1, \dots$) λέγεται μη-ομογενής Poisson με ρυθμό $\lambda(t)$ αν έχει:

Ανεξ. προσαυξ. + $P(N(t+h)=i+j \mid N(t)=i) = \begin{cases} 1-\lambda(t)\cdot h, & j=0 \\ \lambda(t)\cdot h, & j=1 \\ 0, & j \geq 2 \end{cases}$

ή ισοδύναμα αν έχει:

Ανεξ. προσαυξ. + $N(t) \sim Poisson(\Lambda(t))$ με $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du$

3 Ιδιότητες μη-ομογενούς Poisson

1) $X_1, X_2, \ldots$ ούτε ανεξ. ούτε ισον. $P(X_1 > t) = e^{-\Lambda(t)}$

$$P(X_{n+1} > t) = \int_0^\infty e^{-\Lambda(t+s)} \frac{\Lambda(s)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda(s)\,ds$$

2) Ορσ.

3) Ορσ.

4) S_n έχει σ.π.π. $f_{S_n}(t) = \lambda(t) \dfrac{\Lambda(t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\Lambda(t)}$, $t>0$.

4 Κατανομή της S_n

$$P(S_n \le t) = P(N(t) \ge n) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\Lambda(t)} \frac{\Lambda(t)^k}{k!}$$

$$f_{S_n}(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\Lambda(t)} \frac{\Lambda(t)^k}{k!}\right) = \sum_{t=n}^{\infty}\Big(-\lambda(t)\cdot e^{-\Lambda(t)} \cdot \frac{\Lambda(t)^k}{k!} +$$

$$+ e^{-\Lambda(t)} \frac{k\Lambda(t)^{k-1}\lambda(t)}{k!}\Big) =$$

$$= \lambda(t) e^{-\Lambda(t)} \left(-\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Lambda(t)^k}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Lambda(t)^{k-1}}{(k-1)!}\right) =$$

$$= \lambda(t) \cdot \frac{\Lambda(t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\Lambda(t)}$$

3 (Συνέχεια)

4) S_n έχει σ.π.π. $f_{S_n}(t) = \lambda(t) \dfrac{\Lambda(t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\Lambda(t)}$, $t>0$

$$\Big\Downarrow \text{ στην ομογ. Poisson}$$

$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \quad \left(\begin{array}{l}\text{σ.π.π. της} \\ \text{Gamma}(n,\lambda)\end{array}\right)$$

5) $(S_1, S_2, \ldots, S_n \mid N(t)=n) \overset{d}{=} (Y_{1:n}, Y_{2:n}, \ldots, Y_{n:n})$

Y_i ανεξ. $F_{Y_i}(x) = \dfrac{\Lambda(x)}{\Lambda(t)}$, $0 \le x \le t$

6) Υπέρθεση / Διάσπαση

$\{N_1(t)\}, \{N_2(t)\}$ μη ομογ. Poisson $\Rightarrow$ Υπέρθεση $\{N(t)\}$ είναι μη ομογ. Poisson με ρυθμό $\lambda_1(t) + \lambda_2(t)$

$\lambda_1(t) \qquad \lambda_2(t)$

7) $\{N(t)\}$ μη-ομογ. Poisson με ρυθμό $\lambda(t)$ και κάθε γεγονός καταγράφεται πιθ. $p(t)$.
$\{N_1(t)\}$ η διαδικασία των καταγεγρ. θα είναι μη-ομογ. Poisson με ρυθμό $\lambda(t)p(t)$, άρα

$$P(N_1(t)=k) = e^{-\Lambda_1(t)} \cdot \frac{\Lambda_1(t)^k}{k!}, \quad \Lambda_1(t) = \int_0^t \lambda(t)p(t)dt$$

(5) Κατανομή των $\{X_n\}$

$$P(X_1 > t) = P(S_1 > t) = P(N(t)=0) = e^{-\Lambda(t)} \frac{\Lambda(t)^0}{0!} = e^{-\Lambda(t)}$$

$$P(X_{n+1} > t) = \int_0^\infty P(X_{n+1} > t / S_n = s) \, f_{S_n}(s) \, ds =$$

$$= \int_0^\infty P\begin{pmatrix}\text{στο διάστημα } (s,s+t) \\ \text{κανένα γεγονός}\end{pmatrix} \lambda(s) \frac{\Lambda(s)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\Lambda(s)} ds.$$

Όμως: το πλήθος γεγονότων στο $(s, s+t)$ ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\Lambda(s+t) - \Lambda(s)$

Άρα: $P\begin{pmatrix}\text{στο διάστημα } (s,s+t) \\ \text{κανένα γεγονός}\end{pmatrix} = e^{-(\Lambda(s+t)-\Lambda(s))}$

Επομένως: $P(X_{n+1} > t) = \int_0^\infty e^{-(\Lambda(s+t)-\Lambda(s))} \lambda(s) \frac{\Lambda(s)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\Lambda(s)} ds$

$$= \int_0^\infty e^{-\Lambda(t+s)} \frac{\Lambda(s)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda(s) \, ds$$

(6) Σύνθετη Διαδικασία Poisson

$\{N(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson ρυθμού λ και $Z_1, Z_2, \ldots$ ανεξ. ισόνομες
Θέτω

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$$

Η $\{Z(t)\}$ λέγεται σύνθετη διαδικασία Poisson ρυθμού λ και μεγέθους ομάδων $\{Z_i\}$.

7) Άσκηση

Θεωρούμε την εθνική οδό Αθηνών-Λαμίας στην οποία υπάρχουν σταθμοί διοδίων.

Σχηματάρι

Κάστρο

Τραγάνα

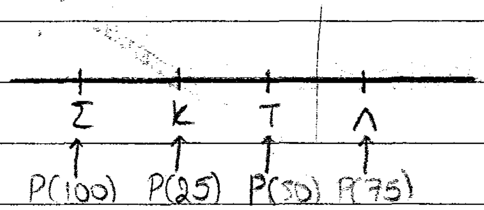
Λαμία

Έστω ότι τα αυτοκίνητα εισέρχονται σύμφωνα με ανεξ. διαδικασίες Poisson με ρυθμούς
100, 25, 50, 75 στα Σ, Κ, Τ, Λ αντίστοιχα

Επίσης, ένα αυτοκίνητο που μπαίνει σ' ένα σταθμό βγαίνει σ' έναν άλλο με πιθανότητες:

$$
\begin{array}{cc|cccc|c}
 & & Σ & Κ & Τ & Λ & \text{Συνεχίζει μετά τη Λ} \\
 & Σ & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \\
P = & Κ & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\
 & Τ & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\
 & Λ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

$P\left(\begin{array}{l}\text{το πλήθος των αυτοκιν. που}\\ \text{διατρέχουν ένα σημείο του}\\ \text{τμήματος Τ-Λ και είναι}\\ \text{100 σε 2 ώρες}\end{array}\right) = ;$



Αυτοκίνητα που μπήκαν στο Σ και περνάνε το σημείο της Τ-Λ ~ Poisson σ.δ. με ρυθμό $100\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) = 25$ αυτοκίνητα/ώρα

\>> \>> \>> \>> K ——— " ——— ~

——— " ——— $25\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = 12,5$ αυτοκίνητα/ώρα

——— " ——— Τ ——— " ——— ~

——— " ——— 50 αυτοκίνητα/ώρα.

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ

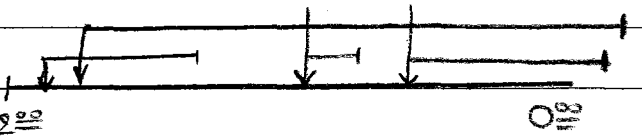
\# αυτοκινήτων που περνάνε το αχ. σημείο της Τ-Λ είναι η υπέρθεση που είναι σ.δ. Poisson με ρυθμό $25+12,5+50=87,5$ αυτ/ώρα

Άρα $P_{ζητ.} = e^{-87,5\cdot 2}\dfrac{(87,5\cdot 2)^{100}}{100!} = e^{-175}\dfrac{175^{100}}{100!}$

8 °Άσκηση

Οι καλεσμένοι σ' ένα πάρτυ που αρχίζει στις 22^{00} φθάνουν σύμφωνα με διαδ. Poisson ρυθμού 6 καλεσμένοι/ώρα
Ο καθένας κάθεται στο πάρτυ για χρόνο t (σε ώρες) που ακολουθεί την $Exp(1)$.
Να βρείτε το αναμενόμενο πλήθος παρόντων στις 00^{00} και στις 02^{00}.

Λσ:



$N(t)$ = # αφιχθ. μέχρι τη στιγμή t
$\{N(t)\} \longrightarrow$ διαδ. Poisson ρυθμού 6.
$N_1(t)$ = # παρόντων τη στιγμή t
$N_1(t)$ = # καταγεγρ. γεγονότων ως τη στιγμή t
όπου καταγραφή = είμαι παρών τη στιγμή t

Πιθαν. καταγρ. άφιξης στη στιγμή $x = e^{-(t-x)} = p(x)$
Άρα: $N_1(t)$ είναι Poisson με ρυθμό $\lambda\int_0^t p(x)\,dx$.
Άρα: στις 00^{00} στο πάρτυ ο αναμενόμενος αριθμός παρόντων είναι $E[N_1(2)] = 6\int_0^2 e^{-(2-x)}dx = 6\int_0^2 e^{-x}dx =$

$$= 6\cdot(1-e^{-2}).$$

Στις 2^{00} θα είναι $6\cdot(1-e^{-4})$.