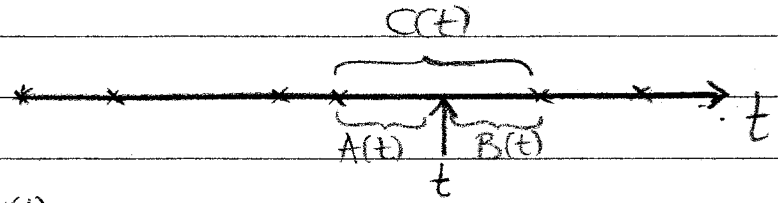
Μάθημα: 16ο — 25/5/2012

Ανανεωτική θεωρία, Ηλικία, Υπολειπόμενος, t-εξαρτώμενος χρόνος ανανέωσης

① Υπενθυμίσεις



$A(t) = t - S_{N(t)}$

$B(t) = S_{N(t)+1} - t$

$C(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$

Έχουμε δει ότι:

1) $\lim_{t\to\infty} P(B(t) > x) = \dfrac{\int_x^\infty (1-G(u))\,du}{\tau}$

2) $\lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \dfrac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$, όπου $G(x)$: κατανομή ενδιάμεσων χρόνων ανανέωσης X

$E[X] = \tau$

$Var[X] = \sigma^2$

② Κατανομή ισορροπίας

$X \geq 0$ τ.μ. με σ.κ. $G(x)$ και $E[X] = \tau$

$Var[X] = \sigma^2$

Ορίζουμε:

$$G_e(x) = \frac{\int_0^x (1-G(u))\,du}{\tau} \ : \text{ κατανομή ισορροπίας της } G$$

Ισχύει:

$$G_e(x) = \lim_{t\to\infty} P(B(t) \leq x)$$

αφού: $\lim_{t\to\infty} P(B(t) \leq x) = 1 - \dfrac{\int_x^\infty (1-G(u))\,du}{\tau} = \dfrac{\tau - \int_x^\infty (1-G(u))\,du}{\tau} =$

$$= \frac{\int_0^\infty (1-G(u))\,du - \int_x^\infty (1-G(u))\,du}{\tau} = \frac{\int_0^x (1-G(u))\,du}{\tau}$$

Ερμηνεία:

$G(x)$: κατανομή χρόνου μεταξύ των γεγονότων

$G_e(x)$: » σε τυχαία χρονική στιγμή ως το επόμενο γεγονός.

Έχουμε: σ.κ. $\Rightarrow$ $G_e(x) = \dfrac{\int_0^x (1-G(u))du}{\tau}$

σ.π.π. $\Rightarrow$ $g_e(x) = \dfrac{1-G(x)}{\tau}$

μέση τιμή $\Rightarrow$ $E[X_e] = \dfrac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$

Μετασχηματισμός LS $\Rightarrow$ $\tilde{G}_e(s) = \int_0^\infty e^{-st} dG_e(t)$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty e^{-st}(1-G(t))dt$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty e^{-st}\int_t^\infty dG(u)dt$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \int_0^u e^{-st} dt\, dG(u)$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \frac{1-e^{-su}}{s} dG(u)$$

$$= \frac{1}{\tau\cdot s}\left(\int_0^\infty dG(u) - \int_0^\infty e^{-st} dG(u)\right)$$

$$= \frac{1-\tilde{G}(s)}{\tau\cdot s}$$

(3) Ειδικές Περιπτώσεις:

1) $X = c$ σταθερή

$$G(x) = \begin{cases} 1, & x \geq c \\ 0, & 0 \leq x < c \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} X_e \sim U(0,c) \\ G_e(x) = \end{matrix}\right\}$$ Διαίσθηση!

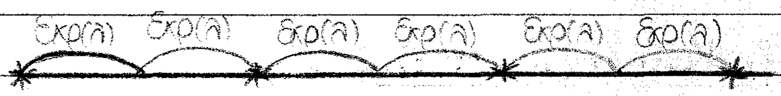
Έχουμε:

σ.π.π. $g_e(x) = \begin{cases} 0, & x \geq c \\ \frac{1}{c}, & 0 \leq x < c \end{cases}$

2) $X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow X_e \sim Exp(\lambda) \not\Rightarrow$ Διαίσθηση!

Έχουμε: $\tilde{G}_e(s) = \dfrac{1-\tilde{G}(s)}{\tau \cdot s} = \dfrac{1-\frac{\lambda}{\lambda+s}}{\frac{1}{\lambda}\cdot s} = \dfrac{\frac{\cancel{s}}{\lambda+s}}{\frac{\cancel{s}}{\lambda}} = \dfrac{\lambda}{\lambda+s}$

3) $X \sim Gamma(2,\lambda) \Rightarrow X_e \begin{cases} \to Gamma(2,\lambda) \text{ με πιθ. } 1/2 \\ \to Exp(\lambda) \text{ με πιθ. } 1/2 \end{cases}$



Περιμένουμε:

$$\text{σ.π.π. } g_e(x) = \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{(2-1)!}x^{2-1}e^{-\lambda x} + \frac{1}{2}\lambda \cdot e^{-\lambda x}, \quad x>0$$

ή

$$\text{L-S} \quad \tilde{G}_e(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s}.$$

Από τους τύπους:

$$\tilde{G}_e(s) = \frac{1-\tilde{G}(s)}{\tau \cdot s} = \frac{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2}{\frac{2}{\lambda}\cdot s} = \frac{\frac{(\lambda+s)^2-\lambda^2}{(\lambda+s)^2}}{\frac{2s}{\lambda}} =$$

$$= \frac{\frac{(s+2\lambda)s}{(\lambda+s)^2}}{\frac{2s}{\lambda}} = \frac{\lambda s + 2\lambda^2}{2(\lambda+s)^2}$$

$$= \frac{A}{\lambda+s} + \frac{B}{(\lambda+s)^2} = \frac{2A(\lambda+s)+2B}{2(\lambda+s)^2}$$

Πρέπει: $\begin{Bmatrix} \lambda = 2A \\ 2\lambda^2 = 2A\lambda + 2B \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} A = \frac{\lambda}{2} \\ B = \frac{\lambda^2}{2} \end{matrix}$

Άρα: $\tilde{G}_e(s) = \dfrac{\lambda/2}{\lambda+s} + \dfrac{\lambda^2/2}{(\lambda+s)^2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\lambda}{\lambda+s} + \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2.$

4) $X \sim Gamma(n,\lambda)$

$\Downarrow$

$$X_e \begin{cases} \to Gamma(n,\lambda), \text{ με πιθ. } \frac{1}{n} \\ \to Gamma(n-1,\lambda), \quad \text{»} \quad \frac{1}{n} \\ \quad \vdots \\ \to Gamma(1,\lambda), \quad \text{»} \quad \frac{1}{n} \end{cases}$$

4) Παρατηρήσεις

$$E[X_e] = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau} \geq \frac{\tau}{2} = \frac{E[X]}{2}$$

ισότητα μόνο για $\sigma=0$ (δηλ. $X=c$)

$E[X_e] \to \infty$, καθώς $\sigma^2 \to \infty$

5) Οριακή Κατανομή $A(t)$

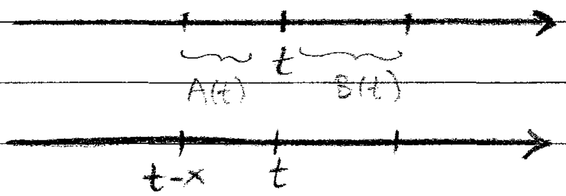
Πρόταση:

1) $\lim\limits_{t\to\infty} P(A(t) \le x) = G_e(x)$

2) $\lim\limits_{t\to\infty} E(A(t)) = \dfrac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$

Απόδειξη:

1) $\{A(t) > x\} = \{$όχι γεγονότα στο διάστημα $[t-x, t]\} =$
$= \{B(t-x) > x\} \Rightarrow$



$$\Rightarrow P(A(t)>x) = P(B(t-x)>x) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} P(A(t)>x) = \lim_{t\to\infty} P(B(t-x)>x) \quad (1)$$

Όμως $\lim\limits_{t\to\infty} P(A(t)>x) = \lim\limits_{u\to\infty} P(B(u)>x) = 1 - G_e(x)$

Άρα $(1) \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} P(A(t) \le x) = G_e(x)$

2) Άσκηση!

6) Από κοινού κατανομή $A(t)$, $B(t)$

Πρόταση:

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t)>x, B(t)>y) = \int_{x+y}^{\infty} (1-G(u))\,du$$

Απόδειξη:

$\{A(t)>x,\ B(t)>y\} = \{$όχι γεγονότα στο διάστημα $[t-x, t+y]\} =$
$= \{B(t-x) > x+y\}$

$P(A(t)>x,\ B(t)>y) = P(B(t-x) > x+y) \Rightarrow$

$\lim_{t\to\infty} P(A(t)>x,\ B(t)>y) = 1 - G_e(x+y) = \int_{x+y}^{\infty} (1-G(u))du$

7) Οριακή κατανομή του $C(t)$

Πρόταση

1) $\lim_{t\to\infty} P(C(t)\le x) = \dfrac{\int_0^x u\, dG(u)}{\tau}$

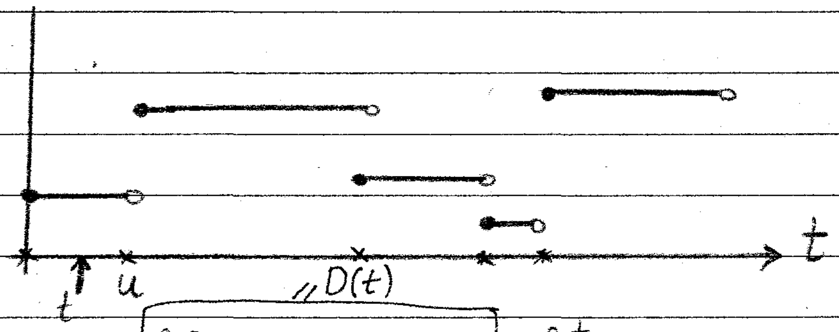
2) $\lim_{t\to\infty} E[C(t)] = \dfrac{\tau^2+\sigma^2}{\tau}$

Απόδειξη:

1) $H(t) = P(C(t)>x)$

$H(t) = \int_0^\infty P(C(t)>x \mid X_1 = u)\, dG(u)$

Όμως: $P(C(t)>x \mid X_1=u) = \begin{cases} 1\{u>x\}, & t<u \\ P(\overbrace{C(t-u)>x}^{H(t-u)}), & u\le t \end{cases}$



Άρα: $H(t) = \boxed{\int_t^\infty 1\{u>x\}\, dG(u)} + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$

Άρα έχω ανανεωτική εξίσωση με

$D(t) = \int_t^\infty 1\{u>x\}\, dG(u) = \int_{\max(t,x)}^\infty dG(u) = 1 - G(\max(t,x))$

Έχουμε: $D(t) \geq 0$

φθίνουσα και

φραγμένη

$$\int_0^\infty |D(t)|dt = \int_0^\infty D(t)dt = \int_0^\infty \int_t^\infty 1\{u>x\} dG(u)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^u 1\{u>x\} dt\, dG(u) = \int_0^\infty 1\{u>x\} u\, dG(u)$$

$$= \int_x^\infty u \cdot dG(u) < \int_0^\infty u\, dG(u) = \tau.$$

Άρα: Λύση Ανανεωτικής Εξίσωσης:

$$P(C(t)>x) = H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-u)\, dM_G(u)$$

$$= 1 - G(\max(t,x)) + \int_0^t (1 - G(\max(t-u,x))\, dM_G(u)$$

Β.Α.Θ. : $\lim\limits_{t\to\infty} P(C(t)>x) = \dfrac{\int_0^\infty D(t)dt}{\tau} = \dfrac{\int_x^\infty u\, dG(u)}{\tau}$

Άρα: $\lim\limits_{t\to\infty} P(C(t)\leq x) = 1 - \dfrac{\int_x^\infty u\, dG(u)}{\tau} = \dfrac{\tau - \int_x^\infty u \cdot dG(u)}{\tau} =$

$$= \frac{\int_0^x u \cdot dG(u)}{\tau}.$$

2) $\lim\limits_{t\to\infty} E[C(t)] = \lim\limits_{t\to\infty} E[A(t)] + \lim\limits_{t\to\infty} E[B(t)] = \cancel{2}\, \dfrac{\tau^2+\sigma^2}{\cancel{2}\tau} = \dfrac{\tau^2+\sigma^2}{\tau}.$