18/2/2013

Στοιχεία από Πιθανότητες
Πιθανογεννήτριες και Μετασχηματισμοί L-S

① Ορισμός

X μη-αρνητική, ακέραια τότε ορίζουμε πιθανογεννήτρια της X να είναι:

$$P_X(z) = E[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} P[X=n] z^n$$

② Ιδιότητες

1) $P_X(z)$ συγκλίνει τουλάχιστον στο $\{z : |z| \leq 1\}$

2) $P[X=n] = \frac{P_X^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots$

3) $P_X(z) = P_Y(z) \iff X, Y$ ισόνομες

4) $P_X^{(n)}(1) = \underbrace{E[X(X-1)\ldots(X-n+1)]}_{\text{Παραγοντική ροπή n-τάξης}}$

$E[X] = P_X'(1)$

προσθέτω και αφαιρώ X για να βγιάξει

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[X^2] - E[X]^2 \\ &= E[X(X-1)] + E[X] - E[X]^2 \\ &= P_X^{(2)}(1) + P_X^{(1)}(1) - P_X^{(1)}(1)^2 \end{aligned}$$

③ Ιδιότητα Αθροισμάτων 1

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξ τμ

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

σπ της $S_n = ?$

Αν θέλω την σ.π της S_n είναι δύσκολο, εμπεριέχει κάποιο κόλπο.

X, Y ανεξ $\quad P[X+Y=n] = \sum_{k=0}^{n} P[X=k]P[Y=n-k]$ Δύσκολο

⑤ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξ, ακερ ≥ 0

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\Downarrow$$

$$P_{S_n}(z) = P_{X_1}(z) P_{X_2}(z) \ldots P_{X_n}(z)$$

Αποδ:

$$P_{S_n}(z) = E[z^{S_n}] = E[z^{X_1} \cdot z^{X_2} \ldots z^{X_n}]$$

$$\overset{\text{ανεξ}}{=} E[z^{X_1}] \cdot E[z^{X_2}] \ldots E[z^{X_n}]$$

$$= P_{X_1}(z) P_{X_2}(z) \ldots P_{X_n}(z)$$

④ $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ, ισον. ακερ ≥ 0

N ακερ ≥ 0 ανεξάρτητη των X_i

$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad$ σπ της $S_n = ;$

Δύσκολο πρόβλημα αν δεν μεταφρασεί σε πιθανογεννήτρια!

Δυσκολο

$$P(S_N=0)=P(N=0)+P(N=1)P(X=0)+P(N=2)P(X=0)+\ldots$$

κλπ.

(6) $X_1, X_2,$ ανεξ, ισον ακερ ≥ 0

$$S_N=\sum_{i=1}^{N} X_i \quad , N \text{ ακερ } \geq 0 \text{ ανεξ των } X_i$$

$$\Downarrow$$

$$P_{S_N}(z)=P_N(P_X(z))$$

<u>Αποδ:</u>

$$P_{S_N}(z)=E[z^{S_N}]=E[E[z^{S_N}/N]]$$

δεσμευμένη μέση τιμή

$$=\sum_{n=0}^{\infty} E[z^{S_N}/N=n]\,P[N=n]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} E[z^{X_1+\ldots+X_n}]\,P[N=n]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} P_X(z)^n\,P[N=n]$$

$$=P_N(P_X(z))$$

(5) <u>Βασικές δυναμοσειρές</u>

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z|<1$$

διωνυμικός αν $a, n \in \mathbb{Z}$

συντελεστής

$$(1+z)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n} z^n, \quad |z|<1, \ a\in\mathbb{R}.$$

$a\in\mathbb{R}$

$$=\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}$$

το καθοδικό παραγοντ. του a n τάξης

⑥ Παράδειγμα

$X_1 = \#$ IX που περνάνε σε 1 ώρα από διόδια
$X_2 = \#$ φορτηγών " "
$X_3 = \#$ μοτοσυκλετών " "

ανεξ
$X_1 \sim Poisson(100)$
$X_2 \sim Poisson(5)$
$X_3 \sim Poisson(20)$

$S_3 = X_1 + X_2 + X_3 \sim ?$

Γενικά αν $X \sim Poisson(\lambda)$ η πιθανογεννήτρια της:

$$P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P[X=n] z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} z^n$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = \boxed{e^{-\lambda(1-z)}}$$

$S_3 = X_1 + X_2 + X_3 \longrightarrow$ αφού αυτές είναι ανεξάρτητες, ισόν ≥ 0 και $\exists \in \mathbb{Z} \geq 0$.

Η πιθανογ. του αθρ. θα είναι το γινόμενο

$P[S_3 = n] = ?$

$$P_{S_3}(z) = P_{X_1}(z) P_{X_2}(z) P_{X_3}(z)$$

$$= e^{-100(1-z)} \cdot e^{-5(1-z)} \cdot e^{-20(1-z)}$$

$$= e^{-125(1-z)}$$

Άρα $S_3 \sim Poisson(125)$

$$\Rightarrow \boxed{P(S_3 = n) = e^{-125} \cdot \frac{(125)^n}{n!}}$$

7 Παράδειγμα

ανεξ. $\left\{ \begin{array}{l} X_1 \sim Geom(p_1), \ P[X_1=n]=(1-p_1)p_1^n \\ X_2 \sim Geom(p_2), \ P[X_2=n]=(1-p_2)p_2^n \end{array} \right. , n=0,1,\ldots$

$S = X_1 + X_2$

$P[S=n] = ?$

$$P_{X_1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P[X_1=n] = \sum_{n=0}^{\infty}(1-p_1)p_1^n z^n$$

$$= (1-p_1)\sum_{n=0}^{\infty}(p_1 z)^n$$

$$= \frac{1-p_1}{1-p_1 z}$$

$$P_{X_2}(z) = \frac{1-p_2}{1-p_2 z}$$

$$\Rightarrow P_S(z) = P_{X_1}(z)P_{X_2}(z) = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_1 z)(1-p_2 z)}$$

Περίπτωση 1 $\quad p_1 \neq p_2$

$$P_S(z) = \frac{A}{1-p_1 z} + \frac{B}{1-p_2 z}$$

$$\frac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_1 z)(1-p_2 z)} = \frac{A}{1-p_1 z} + \frac{B}{1-p_2 z} \overset{(*)}{=}$$ συνέχεια πίσω

$$\xRightarrow{z=\frac{1}{p_1}} \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{\left(1-p_2\cdot\frac{1}{p_1}\right)} = A$$ και για το B:

$$\xRightarrow{z=\frac{1}{p_2}} \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{\left(1-p_1\cdot\frac{1}{p_2}\right)} = B$$

(*)

(*) $P_S(z) = A\sum_{n=0}^{\infty}(p_1 z)^n + B\sum_{n=0}^{\infty}(p_2 z)^n$

$\Longrightarrow \boxed{P[S=n] = A p_1^n + B p_2^n \quad , n=0,1,\ldots}$

Περ 2: $p_1 = p_2$

$P_S(z) = \frac{(1-p)^2}{(1-pz)^2} = (1-p)^2 \cdot (1-pz)^{-2} = (1-p)^2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}(-pz)^n =$

$= (1-p)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)p^n z^n$

$\Longrightarrow \boxed{P[S=n] = (n+1)p^n(1-p)^2 \quad n=0,1,\ldots}$

8) Ορισμός Μετασχηματισμού Laplace-Stieltjes

$X \geq 0$ Τότε ο μετασχ LS της X

$$\tilde{F}_X(s) = E[e^{-sX}] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f_X(x)\,dx \ , & X \text{ συνεχής} \leftarrow \text{σπп} \\ \sum_x e^{-sx} f_X(x) \ , & X \text{ διακριτή} \leftarrow \text{σп} \end{cases}$$

$$\overset{\text{συχνά συναντάμε}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx}\,d\underset{\uparrow \text{σ.κ}}{F_X(x)}$$

9) Ιδιότητες

1) $\tilde{F}_X(s)$ συγκλίνει για $Re(s) \geq 0$

2) $\tilde{F}_X(s) = \tilde{F}_Y(s) \Longrightarrow X, Y$ ισόνομες

3) $E[X^n] = (-1)^n \cdot \tilde{F}_X^{(n)}(0)$

ιδιότητες των πιθανογεννητριών.
ανάλογες

4) $\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ ανεξ } \geq 0 \\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{F}_{S_n}(s) = \tilde{F}_{X_1}(s)\tilde{F}_{X_2}(s)\ldots\tilde{F}_{X_n}(s)$

5) $\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \ldots \text{ ανεξ, ισον } \geq 0 \\ N \text{ ανεξ των } X_i \text{, ακέραιος, } \geq 0 \\ S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{F}_{S_N}(s) = P_N(\tilde{F}_X(s))$

Απόδειξη της 3:

$\tilde{F}_X(s) = E[e^{-sX}]$

$\Rightarrow (-1)^n \tilde{F}_X^{(n)}(0) = E[X^n]$

Απόδειξη της 4:

$$\tilde{F}_{S_n}(s) = E[e^{-sS_n}] = E[e^{-sX_1} \cdot e^{-sX_2} \ldots e^{-sX_n}]$$

$$= E[e^{-sX_1}]\, E[e^{-sX_2}] \ldots E[e^{-sX_n}]$$

$$= \tilde{F}_{X_1}(s) \cdot \tilde{F}_{X_2}(s) \ldots \tilde{F}_{X_n}(s).$$

Απόδειξη της 5:

$$\tilde{F}_{S_N}(s) = E[e^{-sS_N}] = E[E[e^{-sS_N}/N]]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{-sS_N}/N=n]\, P[N=n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{F}_X(s)^n P[N=n]$$

(10) Παράδειγμα

X τμ, ακερ, ≥ 0

με πιθανογεννήτρια $P_X(z) = \dfrac{c-15z}{54-63z+18z^2}$

$P(X=n) = ?$, $n = 0, 1, \ldots$

$\boxed{P_X(1) = 1 \Rightarrow c = 24}$ → γιατί: $P_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) = 1$

$$\Rightarrow P_X(z) = \frac{24-15z}{54-63z+18z^2} = \frac{24-15z}{18(2-z)(\frac{1}{2}-z)} = \frac{A}{2-z} + \frac{B}{\frac{3}{2}-z}$$

$$\Rightarrow \left(A = \frac{2}{3}, B = \frac{1}{6}\right) \quad (*)$$

Αντιστροφή πιθανογεννήτριας (ρητής) με μία άγνωστη παράμετρο

1º) $P_X(1) = 1 \Rightarrow$ Βρίσκω την παράμετρο

2º) Παραγοντοποιώ τον παρονομαστή

3º) Ανάλυση σε απλά κλάσματα

(*) $\Rightarrow$ Άρα $P_X(z) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2-z} + \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{\frac{3}{2}-z}$

Τώρα πρέπει να το φέρω σε τέτοια μορφή ώστε να χρησιμοποιήσω τη γεωμετρική σειρά.

4º) Χρησιμοποιώ τη γεωμετρική σειρά

$$P_X(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{2z}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \frac{1}{9} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2z}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P[X=n] z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] z^n.$$

$$\Rightarrow P[X=n] = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad n=0,1,\ldots$$