25/2/2013

Εκθετική Κατανομή

① Το μοντέλο

X τ.μ να μοντελοποιεί χρόνο (ζωής) χωρίς γήρανση
↓
Αμνήμονη ιδιότητα

i) $X \geq 0$

ii) X συνεχής

iii) $P(X>s+t \mid X>s) = P(X>t)$

Τι σ.π.π θα έχει μια τέτοια τ.μ;

Έστω $g(t) = P(X \geq t)$ = συνάρτηση επιβίωσης

i) $g(0)=1$

ii) $g(t)$ παραγωγίσιμη

iii) $g(s+t)=g(s)g(t)$

$P(X>s+t \mid X>s) = P(X>t)$

$\parallel$

$$\frac{P(X>s+t)}{P(X>s)}$$

Δηλ.

Οι 3 ιδιότητες που απαιτώ να έχει αυτή η συνάρτηση επιβίωσης.

$n=1,2,\dots$

$$g(n) = g(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n}) = g(1)^n, \quad n=1,2,\dots$$

$m=1,2,\dots$

$$g(1) = g\Big(\underbrace{\tfrac{1}{m}+\tfrac{1}{m}+\dots+\tfrac{1}{m}}_{m}\Big) = g\left(\tfrac{1}{m}\right)^m, \quad m=1,2,\dots$$

$\Downarrow$

$$g\left(\tfrac{1}{m}\right) = g(1)^{1/m}, \quad m=1,2,\dots$$

$n, m = 1, 2, \ldots$

$$g\left(\frac{n}{m}\right) = g\Big(\underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}}_{n}\Big) = g\left(\frac{1}{m}\right)^{n} = g(1)^{\frac{n}{m}}, \quad m, n = 1, 2, \ldots$$

Άρα $g(q) = g(1)^{q}, \quad q \in \mathbb{Q}, \quad q \geq 0$

$x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ Τότε $\exists\, q_n \in \mathbb{Q}, q_n \geq 0 : q_n \to x$

$$g(x) = g\left(\lim_{n\to\infty} q_n\right) = \lim_{n\to\infty} g(q_n) = \lim_{n\to\infty} g(1)^{q_n} = g(1)^{x} = e^{\ln g(1)\cdot x} =$$

$$= e^{-\lambda x}, \quad \lambda = -\ln g(1) > 0$$

Άρα $P(X > x) = e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$

και άρα σ.κ $F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$

σ.π.π $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$

(Δηλαδή η εκθετική κατανομή ορίζεται πολύ φυσικά.)

② Μετασχηματισμός LS - Ροπές

$X \sim Exp(\lambda)$

LS της X $\quad \tilde{F}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF_X(x)$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)x}\, dx$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

Βλέπουμε ότι η εκθετική έχει πολύ απλές ροπές:

- $E[X^n] = (-1)^n \tilde{F}_X^{(n)}(0) = \frac{n!}{\lambda^n}$, $n=1,2,\dots$
- $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- $E[X^2] = \frac{2}{\lambda^2} \Longrightarrow Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

③ Περιγραφή τ.μ που αντιστοιχούν σε χρόνους ζωής.

$X \geq 0 \longrightarrow$ σ.κ. $F_X(x) = P(X \leq x)$

σ.π.π $f_X(x)$

συναρτ. επιβίωσης ή συναρτ. αξιοπιστίας: $R_X(x) = P(X > x)$

Ποια η πιθανότητα να φτάσει πχ η λάμπα σε χρόνο ηλικίας x?

hazard rate = Δεσμευμένος ρυθμός βλάβης:

$$\lambda_X(x) = \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x+\delta x \mid X > x)}{\delta x}$$

Πριν τη δέσμευση μας δίνει τη σ.π.π

Μαζί με τη δέσμευση: Ποια η πιθανότητα δεδομένου ότι έχει φτάσει σε ηλικία x να πεθάνει τώρα.

ορισμός δεσμ.πιθ ~>

$$= \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x+\delta x)}{\delta x \cdot P(X > x)}$$

$$= \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} \quad \begin{matrix} = -R_X'(t) \\ = R_X(x) \end{matrix}$$

Αν γνωρίζω το $\lambda_X(x)$ για την $X \geq 0$ τότε

$$\lambda_X(x) = \frac{-R_X'(t)}{R_X(t)} \Longrightarrow -\lambda_X(t) = \left(\log R_X(t)\right)'$$

$$\Longrightarrow -\int_0^t \lambda_X(u)\,du = \log R_X(t) - \cancel{\log R_X(0)}^{\,0}$$

$$R_X(t) = e^{-\int_0^t \lambda_X(u)\cdot du}$$

$$F_X(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda_X(u) du}$$

$$f_X(t) = \lambda_X(t)\cdot e^{-\int_0^t \lambda_X(u) du}.$$

Η εκθετική είναι η μοναδική ≥ 0, συνεχής τμ με $\lambda_X(t) = \lambda$ σταθερά.

4) Ιδιότητες Εκθετικής Κατανομής

→ Να αποτυπώσουμε άνεση στη χρήση τους και να είμαστε και σε θέση να τις αποδεικνύουμε.

1) Αμνήμονη: $X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow P[X > s+t \mid X > s] = P[X > t]$

ή ισχυρή ιδιότητα Markov

2) Ισχυρή Αμνήμονη: $X \sim Exp(\lambda)$, $Y \geq 0$ ανεξάρτητη της X

$$\Rightarrow P[X > t+Y \mid X > Y] = P[X > t]$$

3) Κατανομή του min: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, $X_i \sim Exp(\lambda_i)$

$$\Rightarrow \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim Exp(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)$$

4) Δείκτη του min: $X_1, X_2, \ldots X_n$, ανεξάρτητες, $X_i \sim Exp(\lambda_i)$

$$\Rightarrow P(X_i = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}$$

Αν το εκφράσουμε για 2:

$\lambda_1 = 1 \xrightarrow{P} \frac{1}{3}$

$\lambda_2 = 2 \xrightarrow{P} \frac{2}{3}$

Η πιθανότητα να χαλάσει για κάθε i μονάδα.

Η διάρκεια μέχρι την οποία χάλασε, είναι ανεξάρτητη από το λόγο που χάλασε: / Μη διαισθητικό...

5) Ανεξαρτησίας κατανομής και δείκτη του min:

Για 2:

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 99$

$X_1, X_2, \ldots X_n$ ανεξ, $X_i \sim Exp(\lambda_i)$, $N =$ δείκτης i τέτοιος ώστε

$X_i = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \Rightarrow N, \min(X_1, \ldots, X_n)$ ανεξάρτητες

6) Αθροίσματος: $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Exp(\lambda)$ ανεξάρτητες

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(n, \lambda)$$

$$f_{S_n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \; x > 0$$

7) Τυχαίο γεωμετρικό άθροισμα: $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \sim Exp(\lambda)$, ανεξάρτητες, N ανεξάρτητο των X_i

και

$$P(N=n) = (1-p)p^{n-1}, \; n \geq 1,$$

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow S_N \sim Exp(\lambda p)$$

5) Αποδείξεις:

1) Από ορισμό ✓

2) δεσμεύω καλύτερα στην Y ώστε να παρουσιάζεται η πιο εύκολη συνάρτηση επιβίωσης.

$$P[X > t+Y \mid X > Y] = \frac{P[X > t+Y]}{P[X > Y]} \overset{\text{θ.ο.π}}{=} \frac{\int_0^\infty P(X > t+y) f_Y(y)\,dy}{\int_0^\infty P(X > y) f_Y(y)\,dy}$$

$$= \frac{\int_0^\infty e^{-\lambda(t+y)} f_Y(y)\,dy}{\int_0^\infty e^{-\lambda y} f_Y(y)\,dy} = e^{-\lambda t} =$$

$$= P(X > t).$$

3) $P(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) > t) = P(X_1 > t, \ldots, X_n > t)$

$$\overset{X_i \text{ ανεξάρτητες}}{=} P(X_1 > t) \cdot \ldots \cdot P(X_n > t)$$

$$= e^{-\lambda_1 t} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda_n t}$$

$$= e^{-(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) t}$$

4) Για $n=2$ (η βασική ιδέα και γενικεύεται για περισσότερες)

X_1, X_2 ανεξάρτητες, $X_i \sim Exp(\lambda_i)$,

$$N = \begin{cases} 1, & X_1 = \min(X_1, X_2) \\ 2, & X_2 = \min(X_1, X_2) \end{cases}$$

$$P(N=1) = P(X_1 \leq X_2) = \int_0^\infty P(X_2 \geq x) f_{X_1}(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\,dx$$

$$= \lambda_1 \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\,dx$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

5) Για $n=2$

$$P(N=1, \min(X_1, X_2) > x) = P(x < X_1 \leq X_2)$$ δεσμεύω ως προς X για τον ίδιο λόγο πάλι

$$= \int_x^\infty P(x < x_1 \leq X_2) f_{X_1}(x_1)\,dx_1$$

$$= \int_x^\infty e^{-\lambda_2 x_1} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}\,dx_1$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} = P(N=1) P(\min > x)$$

άρα είναι ανεξάρτητα