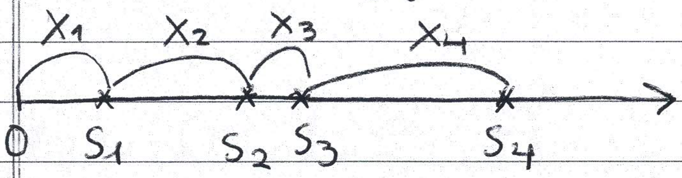
4/3/2013

Διαδικασία Poisson

① Κίνητρα - Στόχος

Μοντελοποίηση γεγονότων στο χρόνο



$0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots$ Ακολουθία χρόνων γεγονότων

$N(t) = \#$ γεγονότων στο $(0,t]$ ← Απαριθμήτρια στοχ. διαδ.
$= \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$

② Ορισμός I σ.δ Poisson

Έστω $\underset{S_0}{0} \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots$, $X_n = S_n - S_{n-1}$, $n \geq 1$

Αν $\{X_n, n=1,2,\dots\}$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες με
$X_i \sim \exp(\lambda)$
τότε η σ.δ $\{N(t) : t \geq 0\}$, $N(t) = \#$ γεγονότων στο $(0,t]$
λέγεται σ.δ Poisson ρυθμού λ. ⇝ Το μέσο πλήθος γεγονότων στη μονάδα του χρόνου

③ Βασικοί υπολογισμοί

S_n = χρόνος n-οστού γεγονότος

$F_{S_n}(t) = P_r[S_n \leq t]$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $X_i \sim \exp(\lambda)$ ανεξ.

α. $S_n \sim Gamma(n,\lambda)$

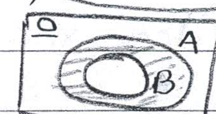
σ.π.π $f_{S_n}(t)=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\, t^{n-1} e^{-\lambda t}, \quad t>0$

Παραγοντική ολοκλήρωση

σ.κ $F_{S_n}(t)=Pr[S_n \le t]=\int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u}\, du$

$$=1-\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$P_n(t)=Pr[N(t)=n]=Pr[S_n\le t<S_{n+1}] \overset{*}{=}$ $\Rightarrow \underbrace{S_{n+1}\le t}_{B} \Rightarrow \underbrace{S_n\le t}_{A}$



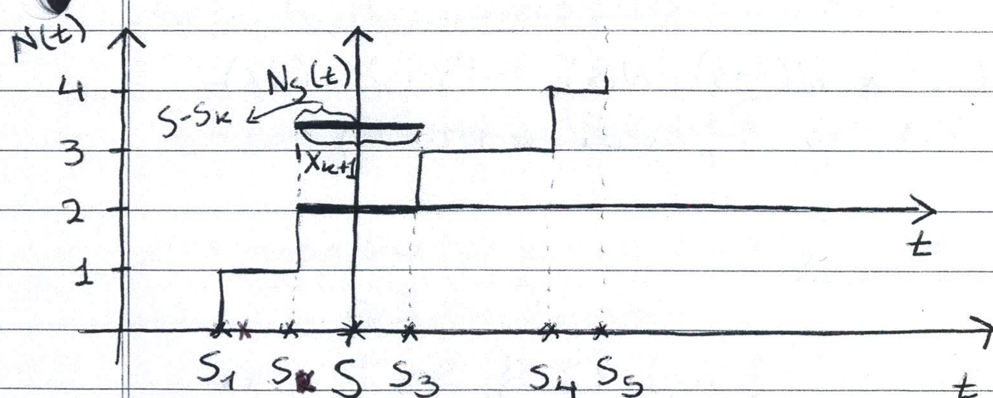
Δηλ. θέλουμε το $A\setminus B$

$\left(\{N(t)=n\}=\{S_n\le t<S_{n+1}\},\ \{S_n\le t\}=\{N(t)\ge n\}\right)$

$\overset{*}{=} Pr[S_n\le t]-Pr[S_{n+1}\le t]=e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n=0,1,\dots$

Για κάθε $t>0$ η τ.μ $N(t)$ ακολουθεί Poisson (λt)

4 Ιδιότητα Ανεξάρτητων και ομογενών προσαυξήσεων



Θεώρημα: Αν $\{N(t): t\ge 0\}$ σ.δ Poisson με ρυθμό λ και $S>0$ και ορίσω $\{N_S(t): t\ge 0\}$ με $N_S(t)=N(S+t)-N(S)$ τότε η $\{N_S(t): t\ge 0\}$ είναι σ.δ Poisson με ρυθμό λ και ανεξάρτητη από την $\{N(t): 0\le t\le S\}$.

Απόδειξη:

Έστω ότι $N(s)=k,\ S_1=s_1,\ S_2=s_2,\dots,S_k=s_k < s$

$$Pr\left[\begin{matrix}1^{\text{ο}} \text{ γεγονός της} \\ N_s(t) > x\end{matrix} \;\middle|\; S_1=s_1, S_2=s_2,\dots,S_k=s_k, N(s)=k\right] =$$

$$= Pr\left[X_{k+1}-(s-s_k) > x \;\middle|\; \cancel{X_1=s_1, X_2=s_2-s_1, X_3=s_3-s_2,\dots,X_k=s_k-s_{k-1}}, X_{k+1} > s-s_k\right]$$

Δεν χρειαζόμαστε αυτή την πληροφορία λόγω της ανεξαρτησίας.

$$= Pr\left[X_{k+1} > x+s-s_k \mid X_{k+1} > s-s_k\right] = Pr\left[X_{k+1} > x\right] = e^{-\lambda x}.$$

Άρα Χρόνος ως το $1^{\text{ο}}$ γεγονός της $\{N_s(t)\}$ είναι $\exp(\lambda)$ και ανεξάρτητος από την $\{N(t) : 0 \le t \le s\}$.
Οι χρόνοι μεταξύ $i+1$ και i γεγονότος για κάθε $i=1,2,\dots$ στην $\{N_s(t)\}$ είναι προφανώς ανεξ $\exp(\lambda)$ (ισχύοντας στην αρχική διαδικασία) και ανεξ. του $1^{\text{ου}}$ χρόνου.

Ιδιότητα Ανεξ. Προσαυξ.
- Αν $t_1 \le t_2 \le t_3 \le t_4$ τότε
- $\underbrace{N(t_4)-N(t_3)}_{\#\text{γεγ. στο } (t_3,t_4]}, \underbrace{N(t_2)-N(t_1)}_{\#\text{γεγ. στο } (t_1,t_2]}$ είναι ανεξάρτητες.

Ιδιότητα Ομογ. Προσαυξ.
- Η τ.μ $N(t+s)-N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$
- (Δηλ. δεν εξαρτάται από το s)

5 Ορισμός ΙΙ σ.δ Poisson

Μια απαριθμήτρια σ.δ $\{N(t) : t \geq 0\}$ θα λέγεται σ.δ Poisson με ρυθμό λ αν:

i) Έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις
ii) Για κάθε $t > 0$ η τ.μ $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

(6) Ισοδυναμία Ορισμού I και II

Ορσ I $\Rightarrow$ Ορσ II ✓

Ορσ II $\Rightarrow$ Ορσ I $\qquad S_0 = 0$

$S_n = \inf\{t \geq 0 : N(t) = n\} \quad , n \geq 1$

$X_n = S_n - S_{n-1} \quad , n \geq 1$

- $P_r(X_1 > t) = P_r(S_1 > t) = P_r[N(t) = 0] = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$

$\Rightarrow X_1 \sim \exp(\lambda)$

- $P_r(X_n > t \mid \underbrace{X_1 = x_1}_{[0, x_1]\ 0\ \gamma\varepsilon\gamma}, \underbrace{X_2 = x_2}_{(x_1, x_1+x_2]\ 1\ \gamma\varepsilon\gamma}, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1})$ = χρησιμοποιώ τις ανεξ. προσαυξήσεις για να "πετάξω" τη δέσμευση

$\underset{nx)}{}$ κτλ

$= P_r($Στο διάστημα $(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}, x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + t]$ δεν συνέβησαν γεγονότα$)$

χρησιμοποιώ τις ομογενείς προσαυξήσεις $= P_r(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$

Άρα $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ, ισον $\sim \exp(\lambda) \Rightarrow$ Ορσ I

(7) Ορισμός III σ.δ Poisson

$\rightsquigarrow$ Πολύ κοντά στη διαίσθησή μας για την σ.δ Poisson, όμως δε βολεύει για πράξεις και εφαρμογές.

Μια απαριθμήτρια σ.δ $\{N(t) : t \geq 0\}$ θα λέγεται σ.δ Poisson ρυθμού λ αν:

i) Έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις

ii) $P_r[N(h) = k] = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h) & , k = 0 \\ \lambda h + o(h) & , k = 1 \\ o(h) & , k \geq 2 \end{cases}$ $\qquad h \to 0^+$

όπου $f(h) = o(h)$

$\Updownarrow$

$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = 0$