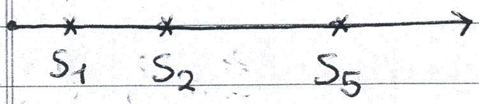
6/3/2013

Διαδικασία Poisson

① Ορισμοί - Παραδείγματα



S_n : χρόνος n-οστού γεγονότος

$N(t) = \#$ γεγον. ως την t

Ορσ I

$X_1, X_2, \ldots \sim \exp(\lambda)$, ανεξ

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$

Τότε η $\{N(t)\}$ λέγεται διαδ. Poisson ρυθμού λ

Ορσ II

$\{N(t)\}$ σ.δ απαριθμήτρια (τιμές $\in \{0,1,\ldots\}$, αύξουσα)

i) Ανεξ. και ομογ. προσαυξήσεις

ii) Η τ.μ $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

$\Rightarrow$ Τότε η $\{N(t)\}$ λέγεται Poisson ρυθμού λ

Ορσ III

$\{N(t)\}$ σ.δ απαριθμήτρια

i) Ανεξ και ομογ. προσαυξήσεις

ii) $$P(N(h)=k) = \begin{cases} 1-\lambda h + o(h) & , k=0 \\ \lambda h + o(h) & , k=1 \\ o(h) & , k \geq 2 \end{cases} \quad h \to 0^+$$

$\Rightarrow$ Τότε η $\{N(t)\}$ λέγεται Poisson ρυθμού λ

$\boxed{\text{Ορσ I} \Leftrightarrow \text{Ορσ II}}$

$\boxed{\text{Ορσ II} \Rightarrow \text{Ορσ III}}$

$P(N(h)=k) = e^{-\lambda h} \cdot \frac{(\lambda h)^k}{k!}, \quad k=0,1,\dots$ • Ανάπτυγμα Taylor

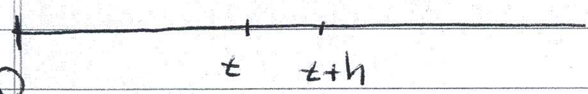
$P(N(h)=0) = e^{-\lambda h} = 1-\lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \dots$ • Όλοι οι όροι που περιέχουν τετράγωνο απορροφώνται στο o(h)

$= 1-\lambda h + o(h), \quad h \to 0^+$

$P(N(h)=1) = e^{-\lambda h} \cdot \lambda h = \lambda h + o(h), \quad h \to 0^+$

$P(N(h) \geq 2) = o(h), \quad h \to 0^+$

$\boxed{\text{Ορσ III} \Rightarrow \text{Ορσ II}}$



$P_n(t) = P(N(t)=n), \quad n=0,1,\dots$

$P_n(t+h) = P(N(t+h)=n)$

$= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)=k) P(N(t+h)=n \mid N(t)=k)$

$= \sum_{k=0}^{n} P_k(t) P(N(h)=n-k)$ ← Χρησιμοποιώ τις ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις.

$= P_n(t)(1-\lambda h + o(h)) + P_{n-1}(t)(\lambda h + o(h)) + o(h), \quad h \to 0^+$

$\Rightarrow \boxed{P_n(t+h) = P_n(t)(1-\lambda h) + P_{n-1}(t)\lambda h + o(h), \quad h \to 0^+, \quad n \geq 1}$

Όμοια, για $n=0 \Rightarrow \boxed{P_0(t+h) = P_0(t)(1-\lambda h) + o(h), \quad h \to 0^+}$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{h\to 0^+} \frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}}_{P_n'(t)} = -\lambda \cdot P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad , n \geq 1$$

$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$ και άρα έχουμε:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) & * z^0 \\ P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad , n \geq 1 & * z^n \end{cases}$$

Θέλω νδο: $P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, n = 0,1,\ldots$

Και στη συνέχεια άθροισμα για όλα τα n.

Ορίζω: $P(t,z) = E[z^{N(t)}] = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n$ η πιθανογεννήτρια της $\{N(t)\}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(t) z^n = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(t) z^n$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t,z) = -\lambda P(t,z) + \lambda z P(t,z)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial}{\partial t} P(t,z)}{P(t,z)} = -\lambda(1-z)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\log P(t,z)\right) = -\lambda(1-z)$$

$$\Rightarrow \log P(t,z) - \log P(0,z) = -\lambda t(1-z)$$

$$\Rightarrow \frac{P(t,z)}{P(0,z)} = e^{-\lambda t(1-z)}$$

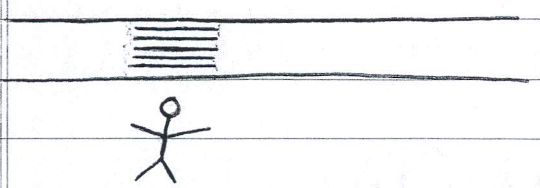
1 γιατί $N(0)=0 \Rightarrow P(0,z) = E[z^{N(0)}] = E[z^0] = 1$

$$\Rightarrow P(t,z) = \underbrace{P(0,z)}_{=1} e^{-\lambda t(1-z)}$$

$$\Rightarrow P(t,z) = e^{-\lambda t(1-z)} = e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t z}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot z^n$$

② Παράδειγμα



- Διάβαση πεζών
- Αυτοκίνητα που περνούν τη διάβαση με ρυθμό λ αυτοκ./χρον.μον.
- Άνθρωπος θέλει να περάσει απέναντι και του παίρνει χρόνο t_0 χρον. μονάδες.
- Επιχειρεί να περάσει αν δει ότι το αυτοκίνητο περνά μετά από το t_0

Ερώτημα: Ποιος ο μέσος χρόνος για να αρχίσει να διασχίζει τη διάβαση?

Λύση: (α' τρόπος επίπονος ...)

X = χρόνος που θα απαιτηθεί για να διασχίσει τη διάβαση
T_i = χρόνος μεταξύ του i-οστού και $(i-1)$-οστού αυτοκινήτου, $i \geq 1$
T_1 = χρόνος $1^{ου}$ αυτοκινήτου
$T_1, T_2, \ldots \sim exp(\lambda)$, ανεξ.
Έστω $N = \inf\{i : T_i > t_0\}$. Τότε:

$$X = \sum_{i=1}^{N-1} T_i \quad , \quad E[X] = ?$$

θεωρ. διπλής μέσης τιμής στον αριθμό των προσθετέων.

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{N-1} T_i\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N-1} T_i \,\middle|\, N\right]\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P[N=n]\, E\left[\sum_{i=1}^{N-1} T_i \,\middle|\, N=n\right] \quad ①$$

Προτού βρει χρόνο $> t_0$ για να περάσει, όλοι οι προηγούμενοι, θα είναι $\leq t_0$.

$$P(N=n) = P(T_1 \leq t_0, T_2 \leq t_0, \ldots, T_{n-1} \leq t_0, T_n > t_0)$$

$$= (1-e^{-\lambda t_0})^{n-1} e^{-\lambda t_0}, \quad n \geq 1 \quad ②$$

← $n-1$ αποτυχίες
← επιτυχία στην $n_{οστή}$

! Το N εξαρτάται από τα T_i

$$E\left[\sum_{i=1}^{N-1} T_i \,\middle|\, N=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1} T_i \,\middle|\, N=n\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} E[T_i \mid N=n] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} E[T_i \mid T_1 \le t_0, T_2 \le t_0, \dots, T_{n-1} \le t_0, T_n > t_0]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} E[T_i \mid T_i \le t_0]$$

$$= (n-1)\, E[T_i \mid T_i \le t_0] \quad (3)$$

$$E[T_i \mid T_i \le t_0] = \frac{\int_0^{t_0} t f_{T_i}(t)\,dt}{P(T_i \le t_0)} = \frac{\int_0^{t_0} \lambda t \cdot e^{-\lambda t}\,dt}{1-e^{-\lambda t_0}}$$

Παραγοντική $\int$

ή

Πυκνότητα της Gamma(n,λ)

$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^n \cdot e^{-\lambda t}$$

$\int$ τροποποίηση γιατί θυμίζει την Gamma

$$= \frac{\frac{1}{\lambda}\int_0^{t_0} \frac{\lambda^2 t}{(2-1)!} \cdot e^{-\lambda t}\,dt}{1-e^{-\lambda t_0}} \quad (4)$$

$$\text{Gamma}(2,\lambda) = \frac{P(S_2 \le t_0)}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})} = \frac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 \cdot e^{-\lambda t_0}}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})}$$

Άρα: $$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} (1-e^{-\lambda t_0})^n e^{-\lambda t_0} (n-1) \cdot \frac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 \cdot e^{-\lambda t_0}}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})}$$

$$= \frac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})} \left(E[N]-1\right)$$

Έχει γεωμετρική κατανομή με πιθ. επιτυχίας $e^{-\lambda t_0}$

$$= \frac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\cancel{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})}} \cdot \cancel{\left(e^{\lambda t_0} - 1\right)}^{\,e^{\lambda t_0}}$$

$$= \boxed{\frac{e^{\lambda t_0} - 1}{\lambda} - t_0}$$

Συμφέρει να δεσμεύω σε κάτι που μου αναγεννά το πείραμα τύχης.

2ος τρόπος (Ανανεωτικός συλλογισμός)

$$E[X] = E[E[X | T_1]]$$

$$= \int_0^{\infty} E[X | T_1 = t] \lambda e^{-\lambda t} dt$$

και $E[X | T_1 = t] = \begin{cases} 0, & t \geq t_0 \\ t + E[X], & t \leq t_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow E[X] = \int_0^{t_0} (t + E[X]) \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$E[X] = \underbrace{\int_0^{t_0} \lambda t e^{-\lambda t} dt}_{\frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0})} + E[X] \underbrace{\int_0^{t_0} \lambda e^{-\lambda t} dt}_{1 - e^{-\lambda t_0}}$$

$$\Rightarrow E[X] = e^{\lambda t_0} \cdot \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0})$$

$$= \boxed{\frac{e^{\lambda t_0} - 1}{\lambda} - t_0.}$$