13/3/2013

Υπέρθεση και διάσπαση διαδικασιών Poisson

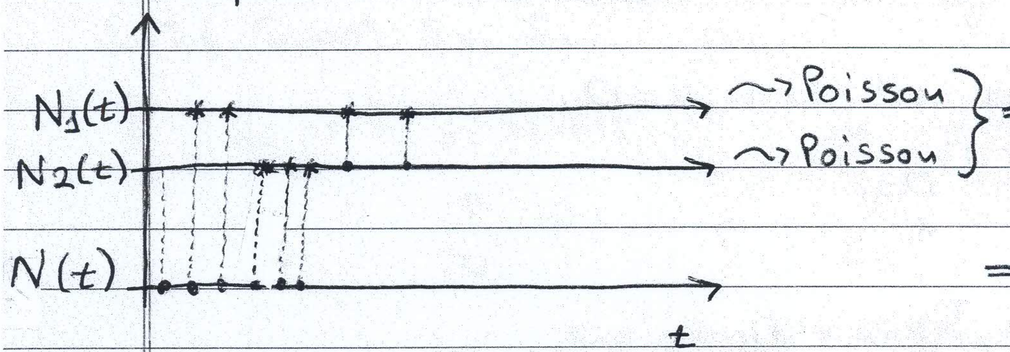
① Ορισμός

$\{N_i(t)\}$ ανεξ. σ.δ Poisson ρυθμού λ_i, $i=1,2,\ldots$

($N_i(t) = \#$ γεγον. τύπου i στο $(0,t]$).

Η σ.δ $\{N(t)\}$ με $N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} N_i(t)$, όπου

$N(t)$ = συνολ πλήθος γεγον. στο $(0,t]$, λέγεται υπέρθεση των $\{N_i(t)\}$.



⟹ Όλοι οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι μεταξύ τους ανεξάρτητοι

⟹ Χρησιμοποιούμε ιδιοτ. minimum της exp.

② Θεώρημα

$\{N_i(t)\}$ ανεξ. σ.δ Poisson ρυθμού λ_i, $i=1,2,\ldots$

$\Downarrow$

Η υπέρθεσή τους, $\{N(t)\}$ είναι επίσης σ.δ Poisson ρυθμού $\lambda = \sum_i \lambda_i$.

Απόδειξη: (Με τον 2º ορισμό) Για 2 σ.δ Poisson

Οι $\{N_1(t)\}$, $\{N_2(t)\}$ είναι ανεξ. σ.δ Poisson με ρυθμούς λ_1, λ_2.

→ Ανεξ + Ομογ. προσαυξήσεις

→ $\forall t$ $N_1(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_1 t)$

$N_2(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_2 t)$

Η $\{N(t)\}$ έχει ανεξ και ομογ. προσαυξήσεις.

πχ) $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$

$$N(t_2)-N(t_1) \quad , \quad N(t_4)-N(t_3)$$

$$\begin{array}{c|c} \| & \| \\ (N_1(t_2)-N_1(t_1)) & (N_1(t_4)-N_1(t_3)) \\ + & + \\ (N_2(t_2)-N_2(t_1)) & (N_2(t_4)-N_2(t_3)) \end{array}$$

Άρα $\underline{\text{ανεξ}} \Longrightarrow$ ανεξ. προσαυξήσεις.

$$N(t+s)-N(s) = (N_1(t+s)-N_1(s)) + (N_2(t+s)-N_2(s))$$

$$\overset{d}{=} N_1(t) + N_2(t)$$

$$= N(t)$$

$\Longrightarrow$ ομογ. προσαυξήσεις.

Τέλος, $E[z^{N_1(t)+N_2(t)}] = E[z^{N_1(t)}]\, E[z^{N_2(t)}]$

$$= e^{-\lambda_1 t(1-z)}\, e^{-\lambda_2 t(1-z)}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t(1-z)}$$

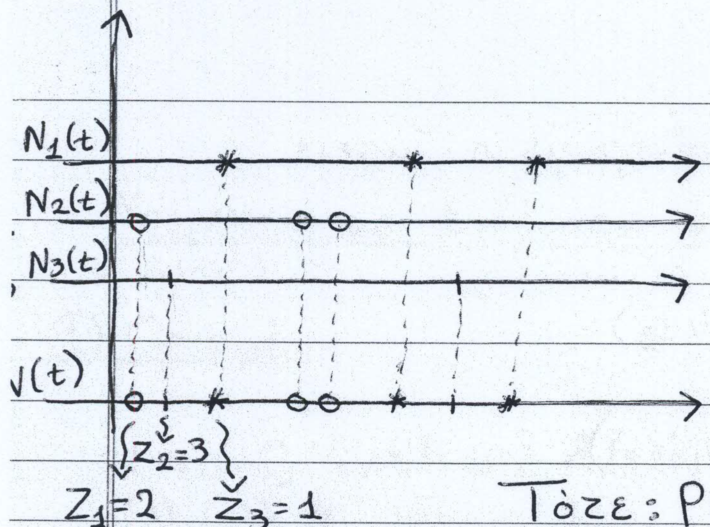
$\Longrightarrow N(t)$ είναι Poisson$((\lambda_1+\lambda_2)t)$

③ Τύποι γεγονότων - Θεώρημα

$\{N_i(t)\}$ ανεξ. σ.δ Poisson με ρυθμό λ_i, $i=1,2,\dots$

και $\{N(t)\}$ η υπέρθεση.

Z_j = τύπος του γεγονότος j της $\{N(t)\}$ $\left(\begin{array}{l}\text{από ποια } \{N_i(t)\} \\ \text{προήλθε.}\end{array}\right)$



Τότε: $P(Z_j=i)=\dfrac{\lambda_i}{\sum\lambda_i}$, $Z_1, Z_2, \ldots$ ανεξ.

• <u>Ιδέα</u> απόδειξης:

$$P(Z_1=i)=P(\min(S_1, S_2, \ldots)=S_i)=\frac{\lambda_i}{\sum\lambda_i}$$

χρόνος $1^{ου}$ γεγον. ...
στην $\{N_1(t)\}\{N_2(t)\}$

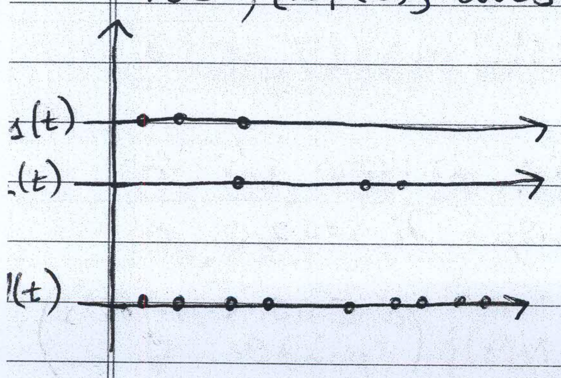
ιδιότητα δείκτη min της exp

Αμνήμονη ιδιότητα $\Longrightarrow$ ανεξ $\{Z_i\}$.

④ <u>Διάσπαση σ.δ Poisson</u>

Έστω $\{N(t)\}$ μια σ.δ Poisson ρυθμού λ και κάθε γεγονός καταγράφεται ως τύπου i, $i=1,2,\ldots$ με πιθανότητα p_i, $(\sum p_i = 1)$ ανεξ. από τα άλλα
$N_i(t) = \#$ γεγονότων τύπου i στο $(0,t]$.

Τότε, $\{N_i(t)\}$ ανεξ. σ.δ Poisson ρυθμού $\lambda_i=\lambda p_i$



Ιδέα Απόδειξης:

Έστω $X_1, X_2, \ldots \sim exp(\lambda)$, ανεξ τμ οι ανεξάρτητοι χρόνοι γεγονότων στην $\{N(t)\}$.

Το 1ο γεγονός της $\{N_1(t)\}$ θα συμβεί σε χρόνο $S_1^{(1)}$.

$S_1^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} X_i$, όπου $\{N=n\} = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1} \neq 1, Z_n \neq 1\}$

$\Big\Downarrow$ οι τμ είναι ανεξάρτητες

$$P(N=n) = p_1 (1-p_1)^{n-1}$$

$$X_i \sim exp(\lambda) \Longrightarrow \tilde{F}_X(S) = \int_0^{\infty} e^{-tS} \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda + S}$$

$$P_N(z) = E[z^N]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} p_1 (1-p_1)^{n-1} z^n$$

$$= p_1 z \sum_{n=1}^{\infty} [(1-p_1) z]^{n-1}$$

$$= \frac{p_1 z}{1-(1-p_1)z}$$

$$\tilde{F}_{S_1^{(1)}}(S) = P_N(\tilde{F}_X(S))$$

$$= \frac{p_1 \cdot \frac{\lambda}{\lambda+S}}{1-(1-p_1)\cdot\frac{\lambda}{\lambda+S}} = \frac{\frac{\lambda p_1}{\cancel{\lambda+S}}}{\frac{\cancel{\lambda}+S-\cancel{\lambda}+\lambda p_1}{\cancel{\lambda+S}}} = \frac{\lambda p_1}{S+\lambda p_1}$$

Το 1ο γεγονός της $\{N_1(t)\}$ συμβαίνει σε χρόνο $exp(\lambda p_1)$ κ.ο.κ. ...

$\rightsquigarrow \{S_n \le t\} = \{N(t) \ge n\}$ / ②, ③, ④

⑤ Παράδειγμα

Γεννήσεις σε μαιευτήριο σύμφωνα με σ.δ Poisson ρυθμού $\lambda = 10$ γενν/μέρα.

i) P(10 γεννήσεις την $1^{η}$ Απριλίου) = ;

ii) P(`` `` `` | 8 γεν στις 31 Μαρτίου) = ?

iii) P(`` `` `` | 40 γεν από 1-6 Απριλ) = ?

iv) P(το $1^{ο}$ αγόρι να είναι το $5^{ο}$ παιδί που γεννιέται από τη στιγμή που ξεκινάει η καταμέτρηση) = ?

v) E[Χρόνος για να γεννηθεί το $1^{ο}$ κορίτσι] = ?

Λύση: Ορίζουμε ότι: $t \rightarrow$ ημέρες

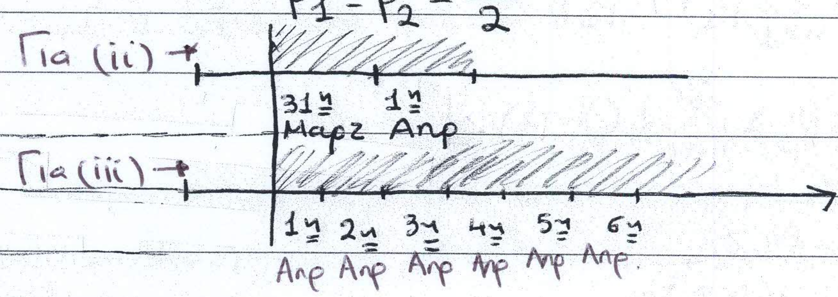
$N(t) = \#$ γεννησεων στο $(0, t] \rightarrow S_1, S_2, \dots$

$N_1(t) = \#$ γεν. κοριτσιών στο $(0, t] \rightarrow S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, \dots$

$N_2(t) = \#$ γεν. αγοριών στο $(0, t] \rightarrow S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, \dots$

$\lambda = 10$

$P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$



i) $P(N(1) = 10)$

Μοντελοποίηση

ii) $P(N(2) - N(1) = 10 \mid N(1) = 8)$

iii) $P(N(1) = 10 \mid N(6) = 40)$

iv) $P(Z_1 = K, Z_2 = K, Z_3 = K, Z_4 = K, Z_5 = A) = P(N_1(S_1^{(2)}) = 4)$

v) $E[S_1^{(1)}]$

i) $P(\overset{t}{N(1)}=\overset{n}{10}) = e^{-\overset{\lambda}{10}\cdot \overset{t}{1}} \cdot \frac{(10\cdot 1)^{10=n}}{10!} = e^{-10} \cdot \frac{10^{10}}{10!}$ ($\lambda=10$)

ii) $P(N(2)-N(1)=10 \mid \cancel{N(1)=8})$ → ανεξ. προσαυξ

$= P(N(2)-N(1)=10) \overset{\text{ομογ. προσαυξ}}{=} P(N(1)=10) = e^{-10} \cdot \frac{10^{10}}{10!}$

→ Δω είναι ανεξάρτητες, πρέπει να τα σπάσω ώστε να γίνουν ξένα.

iii) $P(N(1)=10 \mid N(6)=40) = \frac{P(N(1)=10,\ N(6)=40)}{P(N(6)=40)}$

$= \frac{P(N(1)=10,\ N(6)-N(1)=30)}{P(N(6)=40)}$

Προσοχή, οι $N(6)-N(1)$, $N(5)$ όχι ίσες! Είναι ισόνομες όμως

ανεξ. προσαυξήσεις → $\overset{?}{=} \frac{P(N(1)=10)\, P(N(6)-N(1)=30)}{P(N(6)=40)}$

ομογ. προσαυξήσεις → $\overset{?}{=} \frac{P(N(1)=10)\, P(N(5)=30)}{P(N(6)=40)}$

$= \frac{e^{-10\cdot 1} \cdot \frac{(10\cdot 1)^{10}}{10!}\, e^{-10\cdot 5} \cdot \frac{(10\cdot 5)^{30}}{30!}}{e^{-10\cdot 6} \cdot \frac{(10\cdot 6)^{40}}{40!}}$

$= \binom{40}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{30}$

iv) $P(Z_1=K, Z_2=K, Z_3=K, Z_4=K, Z_5=A) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

$P(N_1(S_1^{(2)})=4) = \int_0^{\infty} P(N_1(t)=4) \cdot 5 \cdot e^{-5t}\, dt$

$= \int_0^{\infty} e^{-5t} \cdot \frac{(5t)^4}{4!} \cdot 5 e^{-5t}\, dt$

$$= \frac{5^5}{4!} \int_0^{\infty} t^4 e^{-10t} \, dt$$

και το μαγειρεύω για να γίνει κατανομή Gamma

$$= \frac{5^5}{10^5} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{10^5}{4!} t^{5-1} e^{-10t} \, dt}_{\text{πυκνότητα Gamma}(5,10)} = \frac{1}{32}$$

$\overset{\shortparallel}{n}$ $\overset{\shortparallel}{\lambda}$

v) $E(S_1^{(1)}) = \frac{1}{5}$ ημέρες.