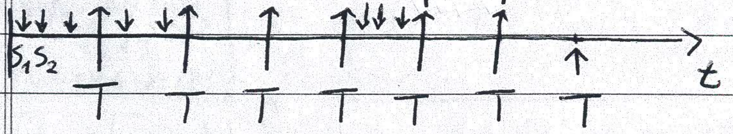
20/3/2013

Ασκήσεις στη διαδ Poisson

① Συρμοί διέρχονται από ένα σταθμό του Μετρό κάθε 4'. Οι επιβάτες φθάνουν σύμφωνα με διαδ. Poisson με ρυθμό 30 επιβ/λεπτό. Ποιος ο μέσος συνολικός χρόνος αναμονής για όλους τους επιβάτες μεταξύ δύο διαδοχικών συρμών? $t=4'$



$t=4$ λεπτά

$\lambda=30$ επιβ/λεπτό

S: συνολ. χρόνος αναμονής

$\{N(t)\}$ Διαδ. Poisson για τους επιβάτες $S_1, S_2, \ldots$: χρόνοι γεγον. (αφίξεων επιβατών)

$$S=\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)$$

$$E[S]=E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)\right]$$ Θέλω να δεσμεύσω στην τ.μ $N(t)$

$$=E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)\,\middle|\,N(t)\right]\right]$$ δεσμευμένη μέση τιμή

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P[N(t)=n]\,E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)\,\middle|\,N(t)=n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}E\left[\sum_{i=1}^{n}(t-U_{i:n})\right]$$ όπου $U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots U_{n:n}$ είναι οι διατεταγμένες τμ από n ανεξ $Unif([0,t])$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(t-E[U_{i:n}])}_{\underbrace{nt-\sum_{i=1}^{n}\frac{it}{n+1}}_{\underbrace{nt-\frac{t}{\cancel{n+1}}\cdot\frac{n\cancel{(n+1)}}{2}}_{=\frac{nt}{2}}}}$$

λύση αν παρατηρήσουμε πιο καλά

λύση με πράξεις

$$(*) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot \frac{nt}{2}} = \frac{t}{2} E[N(t)] = \frac{\lambda t^2}{2}$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot \frac{t}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!}$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot \frac{\lambda t^2}{2} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}}_{e^{\lambda t}}$$

$$= \frac{\lambda t^2}{2}$$

συμμετρική συναρτ. ίδια τιμή για κάθε μετάθεση των $x_1, x_2, \dots, x_n$
πχ $x_1 + x_2 + \dots + x_n$

Εναλλακτικός υπολογισμός του $E\left[\sum_{i=1}^{n} U_{i:n}\right]$

Δε θα μεταβληθεί η μέση τιμή αν τις διατάξω.

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} U_{i:n}\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} U_i\right]$$

Δηλ. η μέση τιμή του αθρ. διατεταγμ. είναι ίση με τη μέση τιμή του αθρ. μη διατεταγμένων.

$$= \frac{nt}{2}$$

Άρα θα περιμένουν κατά μέσο όρο $\frac{30 \cdot 4^2}{2}$ λεπτά.

Δηλ 4 ώρες.

(2) $\{N(t)\}$ σ.δ Poisson ρυθμού λ.

→ $Cov(N(t), N(s)) = ?$

<u>Έστω $s \leq t$</u>

$$Cov(N(t), N(s)) = E[N(t)N(s)] - E[N(t)]E[N(s)]$$

$$= E[(N(t) - N(s) + N(s))N(s)] - \lambda t \cdot \lambda s$$

ανεξ. προσαυξ.

$$= E[(N(t) - N(s))N(s)] + E[N(s)^2] - \lambda t \cdot \lambda s$$

$$= E[N(t) - N(s)]E[N(s)] + \underbrace{E[N(s)^2]}_{= Var[N(s)] + E[N(s)]^2} - \lambda^2 ts$$

$$= \lambda(t-s)\lambda s + \lambda s + (\lambda s)^2 - \lambda^2 ts$$

$$= \cancel{\lambda^2 ts} - \cancel{\lambda^2 s^2} + \lambda s + \cancel{\lambda^2 s^2} - \cancel{\lambda^2 ts}$$

$= \lambda s \rightarrow$ Για $s \leq t$

<u>Για γενικά s,t</u> : $Cov(N(s),N(t)) = \lambda \cdot \min(s,t)$.

(3) Πελάτες φθάνουν σε μια τράπεζα σύμφωνα με ανεξ. διαδ. Poisson

	Μέσος χρόνος εξυπ.
$\lambda_1 = 10$ πελ/ώρα $\rightarrow$ Καταθέσεις	$3'$
$\lambda_2 = 12$ πελ/ώρα $\rightarrow$ Αναλήψεις	$2'$
$\lambda_3 = 8$ πελ/ώρα $\rightarrow$ Άλλες συναλ.	$10'$

Ποιος ο μέσος χρόνος εξυπ. ενός πελάτη?

Μπακάλικος τρόπος: $\dfrac{10 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 8 \cdot 10}{10 + 12 + 8}$
(Σχεδόν Ντετερμινιστικός)

Λύση: $P(\text{ένας πελ. είναι τύπου } i) = P(\underset{}{\overset{\text{τύπος του } j\text{-οστού πελάτη}}{Z_j}} = i) = \dfrac{\lambda_i}{\Sigma \lambda_i}$

$$P(\text{ένας πελ. έχει έρθει για καταθ}) = \frac{10}{10+12+8} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{ένας πελ. έχει έρθει για αναλ}) = \frac{12}{10+12+8} = \frac{2}{5}$$

$$P(\text{ένας πελ. έχει έρθει για άλλη συναλ}) = \frac{8}{10+12+8} = \frac{4}{15}$$

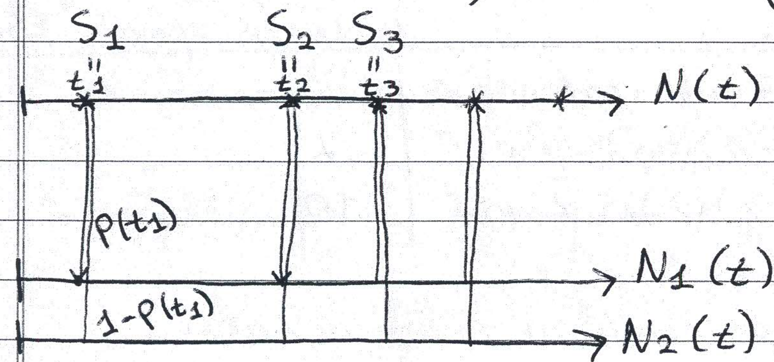
$$E[\text{χρόνος εξυπ}] = \sum_{i=1}^{3} P(\text{ο πελ. είναι τύπου } i)\, E[\text{Χρόνος εξυπ.} \mid \text{τύπου } i]$$

$$= \frac{10}{30} \cdot 3 + \frac{12}{30} \cdot 2 + \frac{8}{30} \cdot 10$$

④ Μη ομογενής διάσπαση της σ.δ Poisson

Θεώρημα

Έστω $\{N(t)\}$ σ.δ Poisson με ρυθμό λ. Κάθε γεγονός που συμβαίνει μια στιγμή t καταγράφεται με πιθανότητα $P(t)$.
Αν $N_1(t) = \#$ καταγεγρ. γεγον. ως τη στιγμή t, τότε η $N(t)$ έχει κατανομή Poisson$\left(\lambda \int_0^t p(u)\,du\right)$.



Απόδειξη

Υπενθύμιση: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$\Downarrow$$

$$P_X(z) = E[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}}_{P(X=n)} \cdot z^n$$

$$= e^{-\lambda(1-z)}$$

Υπολογίζουμε την πιθανογεννήτρια της $N_1(t)$

$$N_1(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \underbrace{I(\text{το } i \text{ γεγονός της } \{N(t)\} \text{ καταγράφηκε})}_{= I_i(S_i)}$$

όπου: $I_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{με πιθ } p(t) \\ 0, & \text{με πιθ } 1-p(t) \end{cases}$

$$P_{N_1(t)}(z) = E\left[z^{N_1(t)}\right]$$

$$= E\left[z^{\sum_{i=1}^{N(t)} I_i(S_i)}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\, E\left[z^{\sum_{i=1}^{N(t)} I_i(S_i)} \,\middle|\, N(t)=n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot E\left[z^{\sum_{i=1}^{n} I_i(U_{i:n})}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot E\left[z^{\sum_{i=1}^{n} I_i(U_i)}\right]$$

όπως πριν επειδή είναι συμμετρική συνάρτηση η $\sum_{i=1}^{n} I_i(x_i)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot E\left[z^{I_1(U_1)}\right]^n$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t \cdot E\left[z^{I_1(U_1)}\right]} \qquad (1)$$

$$E\left[z^{I_1(U_1)}\right] = \int_0^t E\left[z^{I_1(u)}\right] \overbrace{f_{U_1}(u)}^{1/t}\, du$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t \left(z^1 p(u) + z^0(1-p(u))\right) du \qquad (2)$$

Οι (1), (2) δίνουν:

$$P_{N_1(t)}(z) = e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda\left(t-(1-z)\int_0^t p(u)\,du\right)}$$

$$= e^{-\lambda \int_0^t p(u)\,du\,(1-z)}$$

$$\Rightarrow N_1(t) \sim \text{Poisson}\left(\lambda\int_0^t p(u)\,du\right)$$

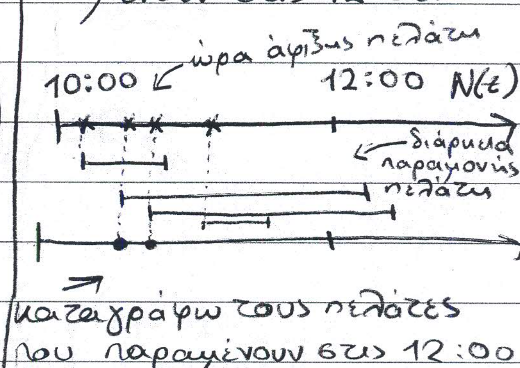
Εφαρμογή του 4

5 Ένα ιατρείο ανοίγει στις 10:00 το πρωί.
Τη στιγμή που ανοίγει περιμένουν 5 πελάτες.
Πελάτες συνεχίζουν να φθάνουν με ρυθμό 10πελ/ώρα.
Κάθε πελάτης παραμένει για χρόνο $\sim$ exp με μέση τιμή 20 λεπτά. ($\frac{1}{\lambda} = 20$ λεπτά $= \frac{1}{3}$ ώρες $\Rightarrow \lambda = 3$)
Ποιο το μέσο πλήθος πελατών στις 12:00 το μεσημέρι?

Πλήθος πελατών στις 12:00 = Πλήθος αρχικών πελατών που παραμένουν στις 12:00 + Πλήθος πελατών που έφθασαν μετά τις 10:00 και παραμένουν στις 12:00.

$$\mathrm{Bin}\Big(\underset{n}{\underset{\shortparallel}{5}}, \underset{p}{\underset{\shortparallel}{P\Big(\substack{\text{πελάτης παραμ.}\\ \text{για 2 ώρες}}\Big)}}\Big)$$

$$p = P(X>2) = e^{-3\cdot 2} = e^{-6}$$



Για έναν πελάτη που φτάνει σε χρόνο t (σε ώρες) μετά τις 10:00, τότε:

$$P(\text{καταγραφής}) = P(\text{μένει ως τις 12:00})$$
$$= P\Big(\substack{\text{χρόνος}\\ \text{παραμ}} > 2-t\Big)$$
$$= e^{-3(2-t)}$$

Πλήθος πελατών που φτάνουν μετά τις 10:00 και παραμένουν στις 12:00 $\sim$ Poisson$\left(\lambda\int_0^t p(u)\,du\right)$

$$= 3\int_0^2 e^{-3(2-u)}\,du$$

Άρα: Μέσο πλήθος παρόντων πελ. στις 12:00 $= 5e^{-6} + 3\int_0^2 e^{-3(2-u)}\,du$.