27/3/2013

- Μη ομογενής σδ Poisson
- Σύνθετη σδ Poisson
- Ασκήσεις

① Ορισμός

Μια απαριθμήτρια σ.δ $\{N(t)\}$ με $(N(t) \in \{0,1,2,\dots\},\ N(t)\nearrow)$:

i) $P(N(t+h)=j \mid N(t)=i) = \begin{cases} 1-\lambda(t)\cdot h+o(h), & j=i \\ \lambda(t)\cdot h+o(h), & j=i+1 \\ o(h), & j\geq i+2 \end{cases}$, $h\to 0^+$, $\frac{o(h)}{h}\to 0$

ii) Ανεξ. προσαυξήσεις,

λέγεται μη-ομογ σ.δ Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$.

$\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(u)\,du$.

② Θεώρημα

πχ σε ένα νοσοκομείο που υπάρχει ώρα αιχμής

Αν $\{N(t)\}$ μη-ομογ διαδικασία Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$ τότε η τ.μ $\underbrace{N(t+s)-N(t)}_{\#\text{ γεγονότων στο } (t,t+s]} \sim \text{Poisson}(\underbrace{\Lambda(t+s)-\Lambda(t)}_{\int_t^{t+s}\lambda(u)\,du})$

③ Μη-ομογ. Poisson - κατανομή του χρόνου του n-οστού γεγονότος

Απόδειξη : Όμοια με τη συνεπαγωγή Ορσ III ⟹ Ορσ II στη σδ Poisson

$F_{S_n}(t) = P(S_n \leq t)$

$= P(N(t) \geq n)$ όπου $N(t) \sim Poisson(\Lambda(t))$

$= \sum_{k=n}^{\infty} P(N(t)=k) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\Lambda(t)} \cdot \frac{\Lambda(t)^k}{k!}$

Η σ.π.π είναι

$f_{S_n}(t) = \frac{d}{dt} F_{S_n}(t)$

$= \sum_{k=n}^{\infty} \left(-\lambda(t) e^{-\Lambda(t)} \cdot \frac{\Lambda(t)^k}{k!} + e^{-\Lambda(t)} \cdot \frac{k \Lambda(t)^{k-1} \cdot \lambda(t)}{k!} \right)$

$= e^{-\Lambda(t)} \lambda(t) \left(- \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Lambda(t)^k}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Lambda(t)^{k-1}}{(k-1)!} \right)$

$= \lambda(t) \cdot \frac{\Lambda(t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\Lambda(t)}, \quad t > 0$

Εδώ μπορώ να κάνω έναν έλεγχο για την ειδική περίπτωση της ομογενούς σ.δ Poisson. Δεν εξασφαλίζει ότι είναι σωστό, αλλά θα καταλάβουμε αν είναι λάθος.

Όταν $\lambda(t) = \lambda$ (ομογ. σ.δ Poisson)

$f_{S_n}(t) = \lambda \cdot \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$

$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\lambda t}, \quad t > 0$

↑

σ.π.π Gamma (n, λ) OK

4) Άσκηση

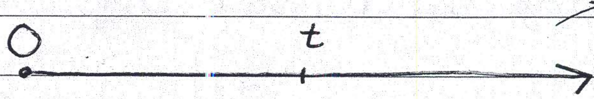
$\{N(t)\}$ μη-ομογ. σ.δ Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$.

$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du$

S_n: χρόνος n-οστού γεγονότος

$P(S_1 \le x \mid N(t)=1) = ?$, $E[S_1 \mid N(t)=1] = ?$

$f_{S_1 \mid N(t)=1}(x) = ?$



Για $x > t$ η πιθ είναι 1 αφού $N(t)=1$. Άρα νοιάζει για $0 \le x \le t$

$$P(S_1 \le x \mid N(t)=1) = P(N(x) \geq 1 \mid N(t)=1) \quad , \; 0 \le x \le t$$

$$= \frac{P(N(x) \geq 1, N(t)=1)}{P(N(t)=1)}$$

$$0 \le x \le t \quad \overset{}{=} \frac{P(N(x)=1, N(t)=1)}{P(N(t)=1)}$$

$$= \frac{P(N(x)=1, N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)}$$

$$\overset{\text{ανεξ. προσαυξ.}}{=} \frac{P(N(x)=1)\,P(N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-\Lambda(x)}} \cdot \frac{\Lambda(x)^1}{1!} \cdot \cancel{e^{-(\Lambda(t)-\Lambda(x))}} \cdot \frac{(\Lambda(t)-\Lambda(x))^0}{0!}}{\cancel{e^{-\Lambda(t)}} \cdot \frac{\Lambda(t)^1}{1!}}$$

$$= \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(t)} \; , \quad 0 \le x \le t.$$

Άρα $F_{S_1|N(t)=1}(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(t)} & , 0 \le x \le t \\ 1 & , x>t \end{cases}$ και όμοια αν θέλω ελέγχω για την περίπτωση της ομογενούς.

$$f_{S_1|N(t)=1}(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \text{ ή } x>t \\ \frac{\lambda(x)}{\Lambda(t)} & , 0 \le x \le t \end{cases}$$

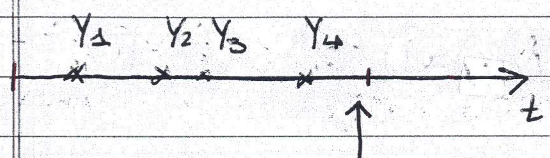
$$E[S_1 | N(t)=1] = \frac{\int_0^t x\lambda(x)dx}{\Lambda(t)}$$

Σ την ομογ. σδ Poisson <u>OK</u>

⑤ <u>Ορισμός</u>

Έστω $\{N(t)\}$ σ.δ Poisson ρυθμού λ και $Y_1, Y_2, \ldots$ ανεξ και ισον. τμ, ανεξ από την $\{N(t)\}$ με κατανομή $F(y)$.

Η σ.δ $\{Y(t)\}$ με $Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ λέγεται σύνθετη σδ Poisson



$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

⑥ <u>Άσκηση:</u>

Παρέες φθάνουν σε μια ταβέρνα σύμφωνα με μια διαδ. Poisson ρυθμού 6 παρέες/ώρα.
Κάθε παρέα έχει j άτομα με πιθανότητα $\left(\frac{1}{2}\right)^j$, $j \geq 1$.

Να βρεθεί:

i) Το μέσο πλήθος ατόμων που φθάνουν στην ταβέρνα σε 2 ώρες

ii) Η πιθανότητα να φθάσουν συνολικά κ άτομα σε 3 ώρες.

→ Μονάδα χρόνου : 1 h
→ $\{N(t)\}$: σ.δ αφίξεων παρεων . Poisson με ρυθμό 6
→ $\{Y(t)\}$: σδ. αφίξεων ατόμων. Σύνθετη Poisson

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

i) → $E[Y(2)] = ?$
ii) → $P[Y(3)=k] = ?$
με $P(Y_i = j) = \left(\frac{1}{2}\right)^j$, $j \geq 1$

$$E[Y(2)] = E\left[\sum_{i=1}^{N(2)} Y_i\right]$$

$$= E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(2)} Y_i \,|\, N(2)\right]\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(2)=n)\, E\left[\sum_{i=1}^{N(2)} Y_i \,|\, N(2)=n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(2)=n)\, n\, E[Y]$$!

$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$ Πάντα.

Αν N τυχαία τότε: <u>όχι</u> $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{N} E[X_i]$
εκτός αν N = σταθερή(n)

Και αν : i) $X_i \geq 0$ ή
ii) $E\left[\sum_{i=1}^{\infty} |X_i|\right] < \infty$ τότε :

$$E\left[\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X_i]$$

$$= E[N(2)]\, E[Y]$$
$$= 12 \cdot 2 = 24$$

διότι

$E[N(2)] = \lambda t = 6 \cdot 2$
$= 12$

και

$$E[Y] = \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

$$\overset{\circledast\ t=1/2}{\Longrightarrow} E[Y] = \frac{1/2}{(1-1/2)^2}$$
$$= 2$$

$\circledast$ $\sum_{j=0}^{\infty} t^j = \frac{1}{1-t}$, $|t| < 1$

$$\overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{j=1}^{\infty} j t^{j-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

$$\overset{\cdot t}{\Longrightarrow} \sum_{j=1}^{\infty} j t^j = \frac{t}{(1-t)^2}$$

$$P_{N(t)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}}_{= P(N(t)=n)} z^n = e^{-\lambda t(1-z)}$$

$$P_Y(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j z^j = \frac{\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}$$

$$P_{Y(3)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y(3)=k) z^k$$

$$P_{Y(3)}(z) = P_{N(3)}(P_Y(z))$$

$$= e^{-18\left(1-\frac{\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}\right)}$$

$$= e^{-18 \cdot \frac{1-z}{1-\frac{z}{2}}}$$

Δεν αντιστρέφεται εύκολα, οπότε θα πηγαίναμε με συνεχείς παραγωγίσεις (τουλάχιστον για μικρές τιμές του k)

$$P(Y(3)=k) = \frac{d^k}{dz^k} P_{Y(3)}(z)$$

7 Άσκηση:

$\{N(t)\}$ σ.δ Poisson ρυθμού λ

$P(Y_i=j) = (1-p)p^j, \; j \geq 0$

$\{Y(t)\}$ με $Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$

Να βρεθεί: $Cov(Y(t), Y(t+s))$

$$Cov(Y(t), Y(t+s)) = E[Y(t) \cdot Y(t+s)] - E[Y(t)]\, E[Y(t+s)] \quad (1)$$

$$E[Y(t)Y(t+s)] = E[Y(t)(Y(t)+Y(t+s)-Y(t))]$$

$$= E[Y(t)^2] + E[Y(t)]\,E[Y(t+s)-Y(t)]$$

$$= E[Y(t)^2] + E[Y(t)]\,E[Y(s)]$$

Άρα $Cov(Y(t), Y(t+s)) = E[Y(t)^2] + E[Y(t)]E[Y(s)] - E[Y(t)]E[Y(t+s)]$

$$E[Y(t)] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right]$$

$$= E[N(t)]\,E[Y_i]$$

$$= \lambda t \cdot \frac{p}{1-p}$$

$$E[Y(t)^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right)^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le N(t)} Y_i Y_j\right] = \dots$$