3/4/2013

Ασκήσεις Φυλλαδίου 2

(1) $\{N(t)\} \sim Poisson(\lambda)$

$P(N(t)=k \mid N(t+s)=k+m) = ?$ όπου $t \geq 0$

$s \geq 0$

$k \geq 0$

$m \geq 0$

$$P(N(t)=k \mid N(t+s)=k+m) = \frac{P(N(t)=k, N(t+s)=k+m)}{P(N(t+s)=k+m)}$$

$$= \frac{P(N(t)=k, N(t+s)-N(t)=m)}{P(N(t+s)=k+m)}$$

ανεξ. προσαυξ.

$$= \frac{P(N(t)=k)\,P(N(t+s)-N(t)=m)}{P(N(t+s)=k+m)}$$

ομογ. προσαυξ.

$$= \frac{P(N(t)=k)\cdot P(N(s)=m)}{P(N(t+s)=k+m)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}\cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda s}\cdot \frac{(\lambda s)^m}{m!}}{e^{-\lambda(t+s)}\cdot \frac{[\lambda(t+s)]^{k+m}}{(k+m)!}}$$

$$= \frac{t^k \cdot s^m}{(t+s)^{k+m}} \cdot \frac{(k+m)!}{k!\,m!}$$

$$= \binom{k+m}{k} \left(\frac{t}{t+s}\right)^k \cdot \left(1-\frac{t}{t+s}\right)^m \sim Bin\left(k+m, \frac{t}{t+s}\right)$$

② $\{N(t)\} \sim Poisson(\lambda)$

$P(N(t) = \text{περιττός}, t \geq 0) = ?$

Λύση: $P(N(t)=n) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

$$P(N(t)=\text{περιττός}) = \sum_{n\ \text{περιττός}} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

- $P(N(t)=\text{περιττός}) + P(N(t)=\text{άρτιος}) = 1$
- $P(N(t)=\text{άρτιος}) - P(N(t)=\text{περιττός}) \overset{*}{=} e^{-2\lambda t}$

$\rightarrow (\Sigma)$

(το * προκύπτει ως εξής: $\sum_{n\ \text{άρτιος}} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} - \sum_{n\ \text{περιττός}} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \overset{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

$\left.\begin{array}{l} n=0,2,4 \ (+) \\ n=1,3,5 \ (-1) \end{array}\right\}$ Εναλλάξ πρόσημα

$$= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t)^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda t}$$

$$= e^{-2\lambda t}$$

Και λύνουμε το σύστημα (Σ).

③ 2 εξαρτήματα σε ένα σύστημα.
Το σύστημα χαλάει, μόλις χαλάσει 1 από αυτά.

- Χρόνος ζωής $1^{ου}$ εξαρτήματος $\to X \sim \exp(\lambda)$

$$f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

- $\underbrace{\text{Χρόνος ζωής}}_{\text{ανεξ}}$ $2^{ου}$ εξαρτήματος $\to Y \sim Gamma(n, \mu)$

$$f_2(t) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \mu^n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\mu t}$$

T = χρόνος ζωής συστήματος
$= \min\{X, Y\}$

$$E[T] = \int_0^\infty P(T > t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty P(\min\{X, Y\} > t)\, dt$$

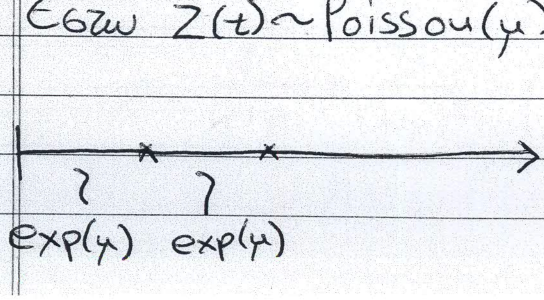
$$= \int_0^\infty P(X > t \text{ και } Y > t)\, dt$$

$$\overset{\text{ανεξ}}{=} \int_0^\infty P(X>t)\, P(Y>t)\, dt \quad (1)$$

- $P(X > t) = e^{-\lambda t}$
- $P(Y > t) = ?$

$$Gamma(n, \mu) = \underbrace{\exp(\mu) + \exp(\mu) \ldots + \exp(\mu)}_{n \text{ ανεξ.}}$$

Έστω $Z(t) \sim Poisson(\mu)$



Y ~ χρόνος μέχρι το n-οστό γεγονός της Z(t)

$P(Y>t) = P($χρόνος ως το n-οστό γεγονός $> t)$

$= P($ως τη στιγμή t έχουν συμβεί το πολύ $n-1$ γεγον$)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu t} \cdot \frac{(\mu t)^k}{k!}$$

Έτσι η (1) $\Leftrightarrow E[T] = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu t} \cdot \frac{(\mu t)^k}{k!} \, dt$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu^k}{k!} \cdot \int_0^\infty t^k \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \, dt$$

Προσπαθούμε να το "σουλουπώσουμε" ώστε να εμφανιστεί μέσα στο ολοκλήρωμα η γάμα που θέλουμε.

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu^k}{k!} \cdot \frac{k!}{(\lambda+\mu)^{k+1}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{(\lambda+\mu)^{k+1}}{k!} \cdot t^k \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \, dt}_{1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu^k}{(\lambda+\mu)^{k+1}} = \frac{1}{\lambda+\mu} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^k$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} \cdot \frac{1-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n}{1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \left[1 - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n\right]$$

β΄ τρόπος

$X \sim exp(\lambda)$

($1^{ο}$ εξάρτημα, κανονικά...)

$2^{ο}$ εξάρτημα $\rightarrow$ n συνιστώσες

$\boxed{Y} \rightarrow Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ $\rightarrow$ χαλάνε σε εκθετικούς χρόνους η κάθε μια

δουλεύει $Y_1 \rightarrow$ χαλάει σε $exp(\mu) \rightarrow$ δουλεύει η Y_2 κτλ...

$Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$

$T_n = \min\{X, Z_n\}$

Ανάλυση $1^{ου}$ βήματος:

ας πούμε ότι δουλεύει το X και η $1_η$ συνιστώσα του Y.

X ...

Y_1 Y_2, ...

Μπορεί να χαλάσει τώρα, είτε το X είτε το Y_1. Αν χαλάσει η Y_1, τότε θα πάμε στην Y_2. Δηλ θα δουλεύει το X με την Y_2. Πάλι εκεί μπορεί να χαλάσει η X ή η Y_2 κτλ...

$\rightarrow$ το min, θα περάσει τόσος χρόνος σίγουρα ότι και να γίνει

$\rightarrow$ χαλάει η Y_1 οπότε το σύστημα δουλεύει με την Y_2 συνιστώσα.

$$E[T_n] = \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot 0 + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot E[T_{n-1}]$$

$\rightarrow$ χαλάει η X οπότε χαλάει το σύστημα

$$E[T_n] = \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot E[T_{n-1}]$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot \left\{ \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot E[T_{n-2}] \right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{(\lambda+\mu)^2} + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 \cdot E[T_{n-2}]$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^3} + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^3 E[T_{n-3}]$$

$$= \dots$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\mu^j}{(\lambda+\mu)^{j+1}} + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-1} E[T_1]$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\mu^j}{(\lambda+\mu)^{j+1}} + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\lambda+\mu}$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} \cdot \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^j + \frac{\mu^{n-1}}{(\lambda+\mu)^n}$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} \cdot \frac{1-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-1}}{1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}} + \frac{\mu^{n-1}}{(\lambda+\mu)^n} = \frac{1}{\lambda}\left[1-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n\right]$$

(4) Poisson με ρυθμό 8 πελάτες/ώρα

α) E, Var του # πελατών σε 1 οχτάωρο.

$E[N(8)] = \lambda t = 8 \cdot 8 = 64$

$Var[N(8)] = 64$

β) P(κανείς δεν ήρθε τα 15 τελευταία λεπτά) = ?

ομογ. προσαυξ.

$\overset{}{=}$ P(κανείς στα 15 πρώτα λεπτά)

$$= P(N(1/4)=0) = e^{-8\cdot\frac{1}{4}} \cdot \frac{(8\cdot\frac{1}{4})^0}{0!}$$

$$= e^{-2}$$

Λύσαμε μεταξύ 9-11 και μεταξύ 9-10 (αντί για 10-11) Κατά λάθος. Θα έβγαινε το ίδιο αποτέλεσμα, αλλά με αλλαγή στους δείκτες.

$$\gamma)\ Cov(\overset{9-11\,\pi\mu}{N(3)-N(1)}, \overset{10-11\,\pi\mu}{N(2)-N(1)}) =$$

$$= Cov\big(N(3)-N(2)+N(2)-N(1), N(2)-N(1)\big)$$

$$= \cancel{Cov(\overset{10-11}{N(3)-N(2)}, N(2)-N(1))}^{\,0} + Cov(N(2)-N(1), N(2)-N(1))$$

ανεξάρτητες, άρα ασυσχέτιστες, άρα = μηδέν

$$= Cov(N(2)-N(1), N(2)-N(1))$$

$$= Var(N(2)-N(1))$$

$$\overset{\text{ομογ. προσαυξ}}{=} Var(N(1))$$

$$= 8\cdot 1 = 8$$

ανεξάρτητες ⟹ ασυσχέτιστες ⟹ cov = 0

$$\delta)\ Cov(\#\text{πελ } 09^{00}\text{-}11^{00}, \#\text{πελ } 10^{00}\text{-}11^{00} \text{ την άλλη μέρα}) = 0$$

(*) Extra: πως θα υπολογίζαμε πχ την:

ΣΩΣΤΟ

$$P(N(t)=k, N(2t)=m) \overset{(*)}{=} P(N(t)=k, N(2t)-N(t)=m-k)$$

$$\overset{\text{ανεξ. προσαυξ}}{=} P(N(t)=k)\cdot P(N(2t)-N(t)=m-k)$$

$$\overset{\text{ομογ. προσαυξ}}{=} P(N(t)=k)\cdot P(N(t)=m-k)$$

ΛΑΘΟΣ

κάποιοι γράφουν αυτό το οποίο είναι λάθος

$$(*) = P(N(t)=k, N(t)=m-k) = 0 \text{ για } m\neq 2k$$

$$= P(N(t)=k)\cdot P(N(t)=m-k)$$

Ακόμα κι αν με "πράξεις" βγαίνει το ίδιο αποτέλεσμα. Δε γίνεται το N(t) να είναι ταυτόχρονα k και m-k.

⑤ $\{N_1(t)\} \sim Poisson(\lambda_1)$

ανεξάρτητες

$\{N_2(t)\} \sim Poisson(\lambda_2)$

$A_i = \#$ γεγονότων της $\{N_i\}$ έως το 1^o γεγονός της άλλης

α) Κατανομές

β) Ανεξ οι δύο κατανομές? ΝΑΙ ή ΟΧΙ?

α) $$P(A_1=n) = \int_0^\infty P(A_1 = n \mid 1^o \text{ γεγ. της } 2^{ης} = \overset{\text{χρόνος}}{x}) \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx$$

$$= \int_0^\infty P(N_1(x)=n) \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda_1 x} \cdot \frac{(\lambda_1 x)^n}{n!} \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 x} dx$$

$$= \frac{\lambda_1^n \cdot \lambda_2}{n!} \int_0^\infty x^n \cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} dx$$

Πάλι το "ίδιο" $\int$ οπότε θέλουμε να εμφανίσουμε την Gamma κατανομή...

$$= \frac{\lambda_1^n \cdot \lambda_2}{n!} \cdot \frac{n!}{(\lambda_1+\lambda_2)^{n+1}} \int_0^\infty \underbrace{\frac{1}{n!} (\lambda_1+\lambda_2)^{n+1} x^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}}_{\overset{\shortparallel}{1}} dx$$

$$= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right) \sim Geom\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$$

(Αντίστοιχα η $P(A_2=n) \sim Geom\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$

β) Δεν είναι ανεξάρτητες πχ $A_1 = 1 \Longrightarrow A_2 = 0$

Και δίνουμε ένα παράδειγμα

Ασκηση Φυλ 3

1 $\{N(t)\} \sim Poisson(\lambda)$

$P(N(1)=1, N(2)=2, N(3)=3, \dots, N(n)=n) = ?$ Σπάμε ώστε να δημιουργήσουμε ανεξάρτητες προσαυξήσεις..

$= P(N(1)=1, N(2)-N(1)=1, N(3)-N(2)=1, \dots, N(n)-N(n-1)=1)$

$\overset{\text{ανεξ προσαυξ}}{=} P(N(1)=1) \cdot P(N(2)-N(1)=1) \cdot \dots \cdot P(N(n)-N(n-1)=1)$

$\overset{\text{ομογ. προσαυξ}}{=} [P(N(1)=1)]^n$

$= \left(e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^1}{1!}\right)^n$