15/4/2013

Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα
Ανανεωτική Εξίσωση-Λύση
Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα

(1) Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα (ΣΑΘ)

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ. με $X_1, X_2, \dots$ ενδ. χρόνοι $\sim G(x)$, $E[X_i] = \tau$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{\overbrace{E[N(t)]}^{=M(t)}}{t} = \frac{1}{\tau}$$

(2) Στοιχ. Αναν. Θεωρ. με Αμοιβές (ΣΑΘΑ)

$R(t)$ = πόση αμοιβή συσσωρεύτηκε μέχρι τη χρονική στιγμή t.

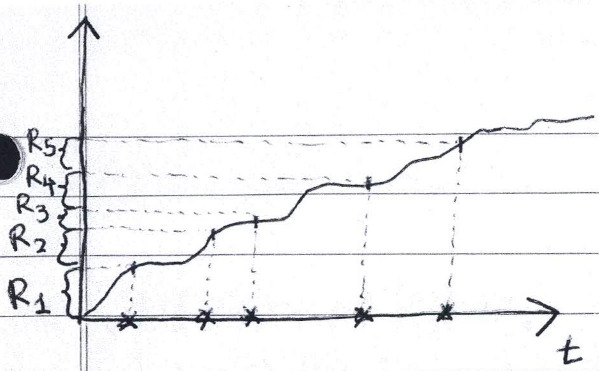
$\{N(t)\}$ αναν. διαδ. με $X_1, X_2, \dots$ ενδ. χρόνοι $\sim G(x)$, $E[X_i] = \tau$
και $\{R(t)\}$ στοχ. διαδ. "αμοιβών" ώστε αν θέσω

$$R_n = \underbrace{R(S_n) - R(S_{n-1})}_{\text{αμοιβή κατά τον } X_n \text{ χρόνο}} \qquad \left(S_0 = 0,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ n \geq 1\right)$$

τότε $(X_1, R_1), (X_2, R_2), (X_3, R_3)$ είναι ανεξ. ισον. τότε

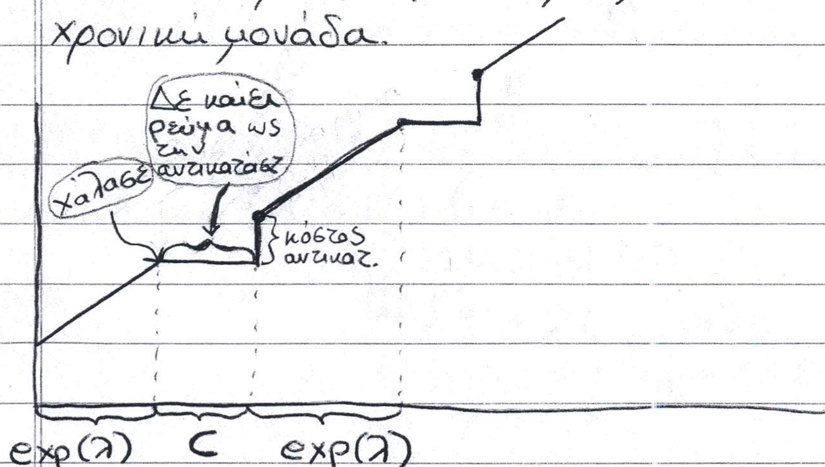
$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R_i]}{E[X_i]} = \frac{r}{\tau}$$ (Δες και σχήμα)

Κάθε φορά που επαναλαμβάνεται ένα στοχ. περιοδικό φαινόμενο η μέση τιμή είναι ίδια.



③ Παράδειγμα

Ένα μηχάνημα έχει χρόνο λειτουργίας $\sim exp(\lambda)$.
Όταν χαλάσει αντικαθίσταται από καινούριο.
Χρόνος αντικατάστασης σταθερός $= C$
Κόστος αντικατάστασης $= K$
Όσο λειτουργεί το μηχάνημα καίει ρεύμα με ρυθμό
1 μονάδα (ρευμ.) / χρον. μονάδα.
Κόστος ρεύματος ανά μονάδα $= h$
Ποιο το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος λειτουργίας ανά χρονική μονάδα.



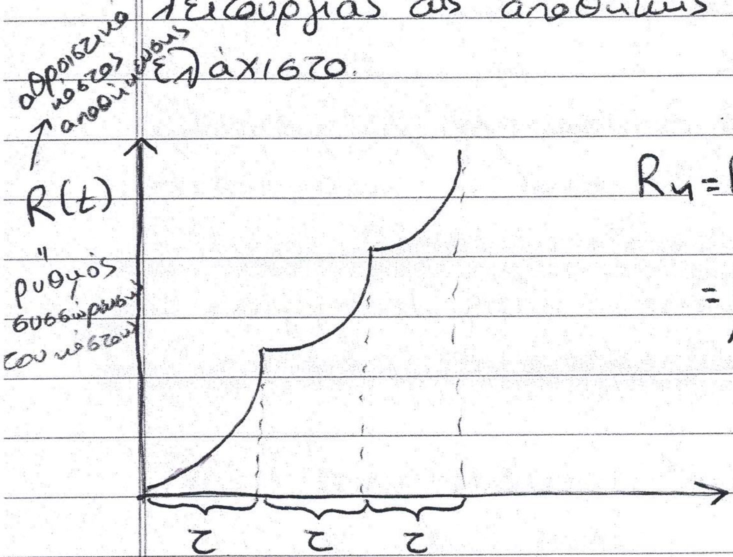
Μας αρκούσε να δούμε τι συμβαίνει σε έναν κύκλο του φαινομένου (Περιοδικότητα)

$R(t) =$ Κόστος ως τη στιγμή t
(X_n, R_n) ανεξ. ισον
$R_n = K + h X_n$

$$\Longrightarrow \text{ΣΑΘΑ} \longrightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R_i]}{E[X_i]} = \frac{K + h\cdot\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + C}$$

(4) Παράδειγμα

Σε μια αποθήκη φθάνουν αντικείμενα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson $\{\Lambda(t)\}$ ρυθμού λ.
Κάθε τ χρονικές μονάδες τα αντικείμενα απομακρύνονται με ένα φορτηγό με κόστος K ανά φορά.
Κάθε αντικείμενο έχει κόστος φύλαξης ανά χρονική μονάδα h.
Να υπολογιστεί το τ ώστε το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος λειτουργίας της αποθήκης ανά χρονική μονάδα να είναι ελάχιστο.



$$R_n = R(S_n) - R(S_{n-1}) = \int_0^{X_n=\tau} h\Lambda(u)\,du + K$$

$$\Downarrow$$

$(X_1, R_1), (X_2, R_2), \ldots$ ανεξ. ισόνομες

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} \overset{\text{ΣΑΘΑ}}{=} \frac{E[R_i]}{E[X_i]} = \frac{K + \frac{\lambda h \tau^2}{2}}{\tau}$$

διότι $E[R_i] = \int_0^{\tau} h\lambda u\,du + K$

$$= K + \frac{\lambda h \tau^2}{2}$$

$$\frac{dC(\tau)}{d\tau} = -\frac{K}{\tau^2} + \frac{\lambda h}{2} = 0 \Longrightarrow \boxed{\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{\lambda h}}}$$

$$\frac{d^2 C(\tau^*)}{d\tau^2} = \frac{2K}{\tau^{*3}} > 0$$ (άρα όντως τ^* σημείο ελαχίστου)

⑤ Ανανεωτική εξίσωση

Όταν έχω $\{N(t)\}$ αναν. διαδ με καταν. ενδ. χρόνων $G(t)$, δεσμεύοντας στο χρόνο του $1^{ου}$ γεγονότος (S_1), δημιουργείται εξίσωση της μορφής

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{άγνωστη} \\ \text{συνάρτ.}}}{H(t)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{γνωστή} \\ \text{συνάρτ.}}}{D(t)} + \underbrace{\int_0^t H(t-u)\,dG(u)}_{\substack{(H*G)(t) \\ \uparrow \\ \text{γνωστή σ.κ}}}$$

⑥ Παράδειγμα 1

$\{N(t)\}$ για αναν. διαδ με καταν. ενδ. χρόνων $G(t)$ και έστω $M(t)=E[N(t)]$ η αναν. συνάρτηση. Έχω:

$$M(t)=E[N(t)]=\int_0^\infty E[N(t)/X_1=x]\,dG(x)$$
$$\overset{*}{=}\int_0^t (1+M(t-x))\,dG(x)$$
$$=\int_0^t dG(x)+\int_0^t M(t-x)\,dG(x)$$
$$=G(t)+\int_0^t M(t-x)\,dG(x)$$

! Όμως:

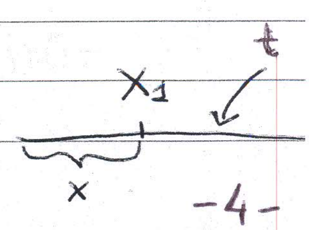
$$E[N(t)|X_1=x] \overset{*}{=} \begin{cases} 0, & t<x \\ 1+\underbrace{E[N(t-x)]}_{=M(t-x)}, & t\geq x \end{cases}$$

Άρα η $M(t)$ ικανοπ. την αναν. εξίσωση με
$H(t)=M(t)$
$D(t)=G(t)$

Παράδειγμα 2

$$S(t)=E[S_{N(t)+1}]=\int_0^\infty E[S_{N(t)+1}|X_1=x]\,dG(x)$$

! Όμως: $E[S_{N(t)+1}|X_1=x]=\begin{cases} x, & t<x \\ x+E[S_{N(t-x)+1}], & t\geq x \end{cases}$



Άρα: $S(t) = \int_0^t \big(x + S(t-x)\big)\,dG(x) + \int_t^\infty x\,dG(x)$

$$= \underbrace{\int_0^\infty x\,dG(x)}_{\tau = E[X_i]} + \int_0^t S(t-x)\,dG(x)$$

Άρα η $S(t)$ ικανοποιεί ανaν. εξίσ. με $H(t) = S(t)$, $D(t) = \tau$ σταθερή

7 Στόχοι

1) Λύση της $H(t) = D(t) + (H * G)(t)$

2) $\lim_{t \to \infty} H(t) = ?$

8 Λύση της Ανaν. Εξίσωσης

$H(t) = D(t) + (H * G)(t)$ Ανaν. εξ

$\Downarrow$ L-S

$\tilde{H}(s) = \tilde{D}(s) + \tilde{H}(s)\tilde{G}(s)$

$\Downarrow$

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{D}(s)}{1 - \tilde{G}(s)}$$

• Υπενθύμιση: $\tilde{M}(s) = \dfrac{\tilde{G}(s)}{1 - \tilde{G}(s)}$

$$= \tilde{D}(s)\left(1 + \frac{\tilde{G}(s)}{1 - \tilde{G}(s)}\right)$$

$$= \tilde{D}(s) + \tilde{D}(s)\tilde{M}(s)$$

$\Longrightarrow H(t) = D(t) + (D * M)(t)$

$$= D(t) + \int_0^t D(t-u)\,dM_G(u)$$ Λύση ανaν. εξίσ.

Ανανεωτική συνάρτηση που αντιστοιχεί στη $G(t)$

$$\boxed{\begin{array}{ll} H(t) = D(t) + (H * G)(t) & \text{Αναν. εξίσωση} \\ H(t) = D(t) + (D * M_G)(t) & \text{Λύση αναν. εξίσωσης} \end{array}}$$

9) Όριο της λύσης της αναν. εξίσωσης

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \lim_{t\to\infty}\left(D(t) + \int_0^t D(t-x)\,dM_G(x)\right)$$

$M(x) \simeq \frac{x}{\tau}$

αυτά θα πεθάνει αφού η ουρά των $\int$ πάει στο μηδέν (συνθήκη 2)

10) Βασικό ανανεωτικό Θεώρημα (ΒΑΘ)

Δύσκολη η απόδειξή του....

Έστω η αναν. εξίσωση $H(t) = D(t) + (H * G)(t)$. Αν:

1) $G(t)$ είναι συνεχής (ή γενικότερα η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων είναι απεριοδική δηλ $\nexists\, d : \sum_k P(X_i = kd) = 1$)

2) $D(t)$ γράφεται σαν διαφορά μη αρνητικών, μονότονων συναρτ

3) $\int_0^\infty |D(t)|\,dt < \infty$

Τότε: $\lim_{t\to\infty} H(t) = \dfrac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{E[X_i]}$ = Μέσος ενδιάμεσος χρόνος.

$E[X_i] = \tau$