Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα I

Μάθημα 16ο:

Εφαρμογές των Βασικών Αποτελ. της Αναν. Θεωρίας

① ΣΑΘΑ

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ., $\{R(t)\}$ στοχ. διαδ.
ώστε (X_n, R_n), $n \geq 1$ ανεξ. ισον.

X_n: $n^{\text{ος}}$ ενδιαμ. χρόνος αναν.
R_n: αντίστοιχη αμοιβή

$\Downarrow$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R_n]}{E[X_n]}$$

Μακροπροθ. μέση αμοιβή ανά χρον. μονάδα

② Αναν. εξισ. - λύση της

$$H(t) = D(t) + \underbrace{(H * G)(t)}_{\int_0^t H(t-u)\,dG(u)} \rightarrow \text{Αναν. Εξισ.}$$

H: Αγν. συναρτ.
D: γν. συναρτ.
G: γν. σ.κ.

$\Downarrow$

$$H(t) = D(t) + (D * M_G)(t) \rightarrow \text{Λύση Αναν. Εξισ.}$$

M_G: Αναν. συν. που αντιστοιχεί στην $G(t)$

Οικονομική Ερμηνεία της αναν. εξισ. - λύση

Έχω γεγ. και τη στιγμή 0

Έστω ότι κάθε γεγονός της αναν. διαδ. έχει επίδραση $D(t)$ t χρονικές μονάδες αργότερα

$H(t)$: συνολική επίδραση από όλα τα γεγον. τη χρ. στιγμή t

$G(t)$: σ.κ. των ενδιαμ. χρ. της αναν. διαδ.

1ος Τρόπος:

συνολ. επιδρ. τη στιγμή t = επιδρ. από το 0^o γ. t + επιδρ. από το 1^o γ. t + επιδρ. από το 2^o γ. + ...

$$H(t)=D(t)=\int_0^t D(t-u)\,dG(u)+\int_0^t D(t-u)\,dG^{(*2)}(u)+\int_0^t D(t-u)\,dG^{(*3)}(u)+\ldots$$

$$=D(t)+\int_0^t D(t-u)\,dM_G(u)$$

$$M_G(t)=\sum_{n=1}^{\infty} G^{(*n)}(t)$$

2ος Τρόπος:

συνολ. επιδρ. τη στιγμή t = επιδρ. από το 0^o γεγ. τη στιγμή t + επιδρ. από τα υπολ. τη στιγμή t

$$H(t)=D(t)+\int_0^t H(t-u)\,dG(u)$$

③ ΒΑΘ

Έστω η αναν. εξίσ. $H(t)=D(t)+\int_0^t H(t-u)\,dG(u)$

με i) $D(t)$ γράφεται ως διαφορά μη-αρνητ., μονότονων συναρτ.

ii) $\int_0^{\infty} |D(t)|\,dt<\infty$

Τότε:

$$G(t) \text{ απεριοδική} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{\tau}$$

Μέση τιμή της $G(t)$

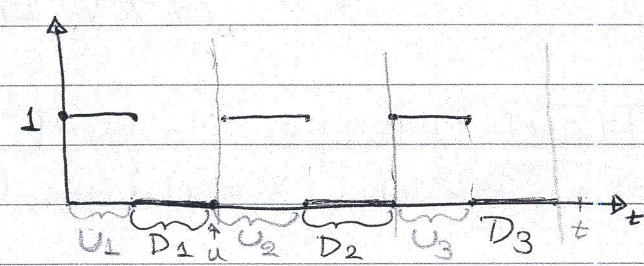
$$G(t) \text{ περιοδική } \left(\exists d : \sum_k P(X=kd)=1\right) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} H(x+kd) = \frac{d\sum_k (x+kd)}{\tau}$$

④ Εφαρμογή: Η εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδ.

Μία μηχανή εναλλάσσεται μεταξύ περιόδων λειτ. και αργία

$U_1, U_2, \ldots$ οι διαδοχ. χρόνοι λειτ. $\quad (U_i, D_i)$ ανεξ., $i \geq 1$

$D_1, D_2, \ldots$ οι —— // —— αργίας



$Z(t)$ = Η κατ. της μηχανής τη στιγμή t.

Να βρεθούν:

1/ Το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η μηχανή λειτουργεί

$$= \lim_{t\to\infty} E\left[\frac{\text{Χρόνος στο } [0,t] \text{ που η μηχ. λειτ.}}{t}\right]$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1\{Z(u)=1\}\,du\right]}{t}$$

2/ Η πιθ. λειτουργίας της μηχ. τη στιγμή t

$= P(Z(t)=1)$

3/ Η οριακή πιθ. λειτουργίας της μηχανής.

$= \lim_{t\to\infty} P(Z(t)=1)$

Λύση:

1/ Ορίζω $R(t)=\int_0^t 1\{Z(u)=1\}du$ διαδ. αμοιβής

και $N(t)=\#$ $\underbrace{\text{αναν. κύκλων}}_{\text{περ. λειτ. + περ. αργίας}}$ ως τη στιγμή t

Έστω $G=G_{U+D}(t)$ η σ.κ. της U_i+D_i, G_U σ.κ. των U_i

G_D σ.κ. των D_i.

$X_i=U_i+D_i$: i-οστος ενδιαμ. χρ.

$R_i=U_i$.

Τα ζεύγη $(X_i,R_i)=(U_i+D_i,U_i)$, $i\geq 1$ είναι ανεξ. και ισον.

οπότε το ΣΑΘΑ είναι εφαρμόσιμο

Άρα

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[\int_0^t 1\{Z(u)=1\}du]}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{E[R(t)]}{t}=\frac{E[R_i]}{E[X_i]}=\frac{E[U]}{E[U]+E[D]}$$

2/ Ορίζω $H(t)=P(Z(t)=1)$. Δεσμεύω στον 1º χρ. αναν.

$$H(t)=P(Z(t)=1)=\int_0^\infty \underbrace{P(Z(t)=1\mid X_1=u)}\,dG_{U+D}(u)$$

$$P(Z(t)=1\mid X_1=u)=\begin{cases}P(t<U_1\mid U_1+D_1=u) & ,\ t<u\\ \underbrace{P(Z(t-u)=1)}_{H(t-u)} & ,\ t\geq u.\end{cases}$$

Άρα $$H(t)=\underbrace{\int_t^\infty P(t<U_1\mid U_1+D_1=u)\,dG_{U+D}(u)}+\int_0^t H(t-u)\,dG_{U+D}(u)$$

$$\| $$

$$\int_t^\infty P(t<U_1,U_1+D_1=u)du$$

$$\| $$

$$P(t<U_1,U_1+D_1\geq t)$$

$$\| $$

$$P(t<U_1)$$

$$\| $$

$$1-G_U(t)=D(t)$$

$$H(t)=D(t)+\int_0^t H(t-u)\,dG_{U+D}(u)$$ Αναν. Εξ 16.

με λύση

$$H(t)=D(t)+\int_0^t D(t-u)\,dM_{G_{U+D}}(u)$$

$$\Rightarrow H(t)=(1-G_U(t))+\int_0^t(1-G_U(t-u))\,dM_{G_{U+D}}(u).$$

3/ Θα χρησιμ. το ΒΑΘ

Έστω ότι $G_{U+D}(t)$ συνεχής

$D(t) = 1 - G_U(t)$ μη-αρν., φθιν.

και

$$\int_0^\infty |D(t)|dt = \int_0^\infty D(t)\,dt = \int_0^\infty (1-G_U(t))dt = E[U] < \infty$$

Άρα από ΒΑΘ

$$\lim_{t\to\infty} P(Z(t)=1) = \lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{\tau} = \frac{E[U]}{E[U]+E[D]}$$

Ειδικές Περιπτώσεις:

1/ $U_i \sim Exp(\lambda)$, $D_i = c\cdot U_i$, c γν. σταθ.

2/ $U_i \sim Exp(\lambda)$, $D_i \sim Exp(\lambda/c)$, ανεξ. της U_i

βλέπουμε τι γίνεται

1/ $$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t 1\{Z(u)=1\}du]}{t} = \frac{E[U]}{E[U]+E[D]} = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + c/\lambda} = \frac{1}{1+c}$$

$$\lim_{t\to\infty} P(Z(t)=1) =$$ είναι ίσα

$P(Z(t)=1) = ;$

$G_U(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t>0$

εκθετική

$$G_{U+D}(t) = P(U_i + D_i \le t) = P(U_i + cU_i \le t) = P\left(U_i \le \frac{t}{1+c}\right) = 1 - e^{-\frac{\lambda t}{1+c}}, t>0$$

(άρα η ανανεωτική διαδ. είναι Poisson)

$$\Rightarrow M_{G_{U+D}}(t) = \frac{\lambda}{1+c}\cdot t$$

Άρα,
$$P(Z(t)=1) = e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-u)}\cdot\frac{\lambda}{1+c}du = e^{-\lambda t} + \frac{\lambda}{1+c}\int_0^t e^{-\lambda u}du$$

$$= e^{-\lambda t}\cdot\frac{1}{1+c}\cdot(1-e^{-\lambda t})$$

2/ $$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t 1\{Z(u)=1\}du]}{t} = \frac{1}{1+c} = \lim_{t\to\infty} P(Z(t)=1)$$

Όμοια με το 1/

$P(Z(t)=1)=;$

$G_U(t)=1-e^{-\lambda t},\ t>0 \quad , G_D(t)=1-e^{-\frac{\lambda}{c}t},\ t>0$

$$\tilde{G}_{U+D}(s)=\tilde{G}_U(s)\tilde{G}_D(s)=\frac{\lambda}{\lambda+s}\cdot\frac{\lambda/c}{\lambda/c+s}=\frac{\lambda^2}{c(\lambda+s)(\frac{\lambda}{c}+s)}$$

$$\tilde{M}_{G_{U+D}}(s)=\frac{\tilde{G}_{U+D}(s)}{1-\tilde{G}_{U+D}(s)}=\frac{\frac{\lambda^2}{c(\lambda+s)(\frac{1}{c}+s)}}{1-\frac{\lambda^2}{c(\lambda+s)(\frac{\lambda}{c}+s)}}$$

$$=\frac{\lambda^2}{(\lambda+s)(\lambda+cs)-\lambda^2}=\frac{\lambda^2}{\lambda cs+\lambda s+cs^2}=\boxed{\frac{\lambda^2}{s(cs+\lambda+\lambda c)}}$$

$$=\boxed{\frac{A}{s}+\frac{B}{cs+\lambda+\lambda c}}$$

$$\Longrightarrow A=\frac{\lambda}{1+c},\quad B=\frac{\lambda^2}{-\frac{\lambda+\lambda c}{c}}=-\frac{\lambda c}{1+c}$$

Άρα,

$$\tilde{M}_{G_{U+D}}(s)=\frac{\lambda}{1+c}\cdot\frac{1}{s}-\frac{\lambda c}{1+c}\cdot\frac{1}{cs+\lambda+\lambda c}$$

$$=\frac{\lambda}{1+c}\cdot\frac{1}{s}-\frac{c}{(1+c)^2}\cdot\frac{\frac{\lambda(1+c)}{c}}{(s+\frac{\lambda(1+c)}{c})}$$

$$\Longrightarrow M_{G_{U+D}}(t)=\frac{\lambda}{1+c}\cdot\frac{1}{t}-\frac{c}{(1+c)^2}\left(1-e^{-\frac{\lambda(1+c)}{c}t}\right)$$

$$\Longrightarrow M'_{G_{U+D}}(t)=\frac{\lambda}{1+c}+\frac{\cancel{c}}{(1+c)^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\lambda(\cancel{1+c})}{\cancel{c}}e^{-\frac{\lambda(1+c)}{c}t}$$

$$=\frac{\lambda}{1+c}\left(1+e^{-\frac{\lambda(1+c)}{c}t}\right)$$

Άρα,

$$P(Z(t)=1)=e^{-\lambda t}+\int_0^t e^{-\lambda(t-u)}\cdot\frac{\lambda}{1+c}\left(1-e^{-\frac{\lambda(1+c)}{c}u}\right)du$$