(Μεταπτυχιακός) 15/05/2013

## Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα I

### Μάθημα 19ο:

### Φυλλάδιο 6

(4) χρόνος ζωής $\sim Exp(\lambda)$

- χαλάσει ή
- ηλικία T

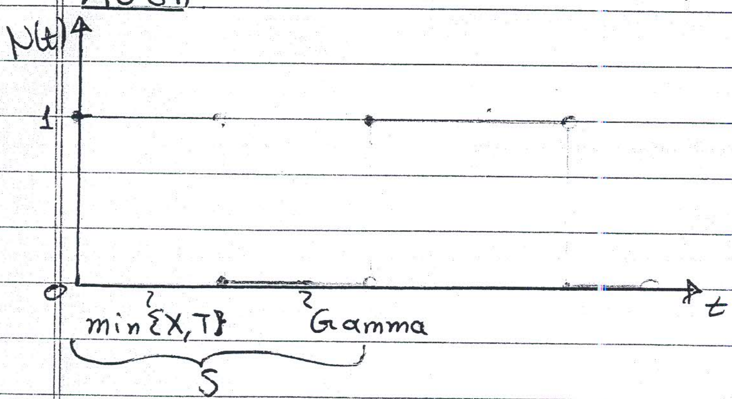
} χρόνος αντικατάστασης $\sim Gamma(r,\mu)$

$$\frac{\mu^r}{(r-1)!} t^{r-1} \cdot e^{-\mu t}, \quad t \geq 0$$

$N(t) = \#$ μηχαν. ενός t

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = ;$$

Λύση:




$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} \stackrel{\Sigma A\Theta}{=} \frac{1}{E[S]}$$

$$E[S] = E[\min\{X,T\} + Y]$$

$$= E[\min\{X,T\}] + \frac{r}{\mu} = \int_0^\infty (1 - F_{\min\{X,T\}}(t))dt + \frac{r}{\mu} =$$

$$= \int_0^\infty Pr[\min\{X,T\} > t]\, dt + \frac{r}{\mu} =$$

$$= \int_0^\infty Pr[X > t, T > t]\, dt + \frac{r}{\mu} =$$

$$= \int_0^T Pr[X > t, T > t]\, dt + \int_T^\infty Pr[X > t, \underline{T > t}]\, dt + \frac{r}{\mu}$$

$$= \int_0^T Pr[X>t]\,dt + \frac{r}{\mu}$$

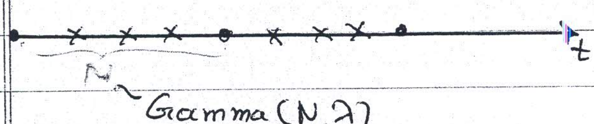
$$= \int_0^T e^{-\lambda t}\,dt + \frac{r}{\mu} = \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} + \frac{r}{\mu}$$

(5) Λεωφορ. αναχωρούν μόλις γεμίσουν
Χωρητικότητας $N$
Επιβ. $\sim$ Poisson ($\lambda$/min)
μακροπροθ. μέσος # λεωφορ. που αναχ. ανά ώρα =;

Λύση:

$N(t)$ = # λεωφορ. που αναχ. ανά ώρα.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{E[\text{διαρκ. κύκλου}]} = \frac{1}{\frac{N}{60\lambda}}.$$




Υπενθύμιση:

Εύρεση $M(t)$

- $\sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t)$ (Άσκηση 1)
- $M(t) = G(t) + \int_0^t M(t-x)\,dG(x)$ (Άσκηση 2)
- ο πιο συνηθισμένος τρόπος → $G(t) \to \tilde{G}(s) \to$ (Άσκηση 3)

  $\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} \to$

  $M(t)$

## Μετασχηματισμοί:

$F(t) \longleftrightarrow \tilde{F}(s)$

$X \sim U \Rightarrow t \longleftrightarrow \frac{1}{s}$

$X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow 1 - e^{-\lambda t} \longleftrightarrow \frac{\lambda}{\lambda + s}$

$\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \longleftrightarrow \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$

② $\underset{\{N(t)\}}{G(t)} \rightarrow$ μείγμα 2 εκθ.

$g(t) = p\lambda \cdot e^{-\lambda t} + (1-p)\mu \cdot e^{-\mu t}, \quad t \geq 0$

$M(t) = E[N(t)] = ;$

Λύση:

$\tilde{G}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dG(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt$

$= \int_0^{\infty} e^{-st}\left(p\lambda e^{-\lambda t} + (1-p)\mu e^{-\mu t}\right)dt$

$= p\lambda \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)t} dt + (1-p)\mu \int_0^{\infty} e^{-(s+\mu)t} dt$

$= \frac{p\lambda}{\lambda+s} + \frac{(1-p)\mu}{\mu+s}$ ①

$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} =$

$= \frac{\frac{p\lambda}{\lambda+s} + \frac{(1-p)\mu}{\mu+s}}{1 - \frac{p\lambda}{\lambda+s} - \frac{(1-p)\mu}{\mu+s}} = \cdots = \frac{[p\lambda + (1-p)\mu]s + \lambda\mu}{s(s + \lambda(1-p) + \mu p)}$

από αποσύνθεση.

$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s + [\lambda(1-p) + \mu p]}$ ⊛

$$\Rightarrow M(t) = A\cdot t + \frac{B}{[\lambda(1-p)+\mu p]}\cdot\left(1-e^{-(\lambda(1-p)+\mu p)t}\right)$$

$$\circledast = \frac{B}{\lambda(1-p)+\mu p}\cdot \underbrace{\frac{\lambda(1-p)+\mu p}{[\lambda(1-p)+\mu p]+s}}_{L-S \text{ της } Exp(\lambda(1-p)+\mu p)}$$

① $G(t) \sim U(0,1)$

$M(t) = E[N(t)] = ;$

Λύση:

$M(t) = G(t) + \int_0^t M(t-x)\,dG(x) \Rightarrow$

$M(t) = t + \int_0^t M(\underbrace{t-x}_{u})\,dx \Rightarrow$

$M(t) = t + \int_0^t M(u)\,du \Rightarrow$

παραγωγίζω ως προς t

$M'(t) = 1 + M(t) \Rightarrow$

$M'(t) - M(t) = 1 \Leftrightarrow$

$e^{-t}M'(t) - e^{-t}M(t) = e^{-t} \Leftrightarrow$

$(e^{-t}M(t))' = e^{-t} \Rightarrow$

$e^{-t}M(t) = -e^{-t} + c$

$$\left.\begin{array}{l} M(t) = -1 + c\cdot e^{t} \\ M(0) = 0 \Leftrightarrow \ldots c = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow M(t) = e^{t} - 1 \quad , 0 \leq t \leq 1.$$

Σημείωση: Η ομοιόμορφη μπορεί να λυθεί και με τους 3 τρόπους, απλώς είναι δύσκολο να βρεθεί άλλο παράδειγμα για αυτόν τον τρόπο!

③ $G(t) \sim Gamma(r,\lambda)$

$\{N(t)\}$

$$\frac{\lambda^r}{(r-1)!} t^{r-1} e^{-\lambda t} \quad , t \geq 0$$

Ν.δ.ο. $M(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{nr-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \right\}, \quad t \geq 0.$

Λύση:

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t)$$

$G \sim Gamma(r, \lambda) \Rightarrow$

$G^{*n} \sim Gamma(nr, \lambda) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} G^{*n}(t) &= Pr[S_{nr} \leq t] \\ &= Pr[N(t) \geq nr] \\ &= \sum_{j=nr}^{\infty} Pr[N(t) = j] \\ &= \sum_{j=nr}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=nr}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{nr-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \right\} \end{aligned}$$

## Φυλλάδιο 7

① $\{N(t)\}$

$G(t) \to \tau, \sigma^2$

$M(t) = E[N(t)], \quad t \geq 0$

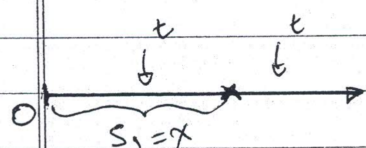
$H(t) = M(t) - \frac{t}{\tau}, \quad t \geq 0$

α) αναν. εξισ. + λύση για $H(t)$

β) $\lim_{n \to \infty} \left( M(t) - \frac{t}{\tau} \right) = ;$ (συναρτήσει $\tau, \sigma^2$)

Λύση:

α) $H(t) = \int_0^\infty \underbrace{E\left[N(t) - \frac{t}{\tau} \,\middle|\, S_1 = x\right]} dG(x)$ (1)




$$\hookrightarrow \begin{cases} 1 + E[N(t-x)] - \frac{t}{\tau}, & x \le t \\ 0 - \frac{t}{\tau}, & x > t \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 + U(t-x) - \frac{t}{\tau}, & x \le t \\ -\frac{t}{\tau}, & x > t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 + H(t-x) + \frac{t-x}{\tau} - \frac{t}{\tau}, & x \le t \\ -\frac{t}{\tau}, & x > t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 + H(t-x) - \frac{x}{\tau}, & x \le t \\ -\frac{t}{\tau}, & x > t \end{cases}$$

$$(1) \Longrightarrow H(t) = \int_0^t \left(1 + H(t-x) - \frac{x}{\tau}\right) dG(x) + \int_t^\infty -\frac{t}{\tau}\, dG(x)$$

$$H(t) = \underbrace{\int_0^t dG(x) - \frac{1}{\tau}\int_0^t x\, dG(x) - \frac{t}{\tau}\int_t^\infty dG(x)} + \int_0^t H(t-x) dG(x)$$

$$H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-x) dG(x) \quad \longleftarrow \text{αν. εξ16.}$$

$$H(t) = D(t) = \int_0^t D(t-x)\, dm(x) \quad \longleftarrow \text{λύση αναν. εξ16.}$$

β) $\lim_{t\to\infty} H(t) \overset{\text{ΒΑΘ}}{=} \dfrac{\int_0^\infty D(t)dt}{\tau}$

προϋποθέσεις

* $\int_0^\infty D(t)\, dt$

* $\searrow$ η διαφ. $\searrow$

* $\int_0^\infty |D(t)|\, dt < \infty$

$$D(t)=\int_0^t dG(x)-\frac{1}{\tau}\int_0^t x\,dG(x)-\frac{t}{\tau}\int_t^\infty dG(x)$$

$$=\int_0^t dG(x)-\frac{1}{\tau}\left[x\,G(x)\right]_0^t+\frac{1}{\tau}\int_0^t dG(x)-\frac{t}{\tau}(1-G(t))$$

$$=\int_0^t dG(x)-\cancel{\frac{t\,G(t)}{\tau}}+\frac{1}{\tau}\int_0^t dG(x)-\frac{t}{\tau}+\cancel{\frac{t}{\tau}G(t)}$$

$$=\int_0^t dG(x)+\frac{1}{\tau}\int_0^t dG(x)-\frac{t}{\tau} \qquad \int_0^t 1\,dt$$

$$\Rightarrow D(t)=\int_0^t dG(x)-\frac{1}{\tau}\int_0^t(1-G(t))\,dt$$

$$=G(t)-\frac{1}{\tau}\int_0^t(1-G(t))\,dt$$

$$=-(1-G(t))+1-\frac{1}{\tau}\int_0^t(1-G(t))\,dt$$

$$=-(1-G(t))+\frac{1}{\tau}\int_0^\infty(1-G(t))\,dt-\frac{1}{\tau}\int_0^t(1-G(t))\,dt$$

$$\Rightarrow D(t)=\underbrace{-(1-G(t))}_{D_1(t)\ \downarrow}+\underbrace{\frac{1}{\tau}\int_t^\infty(1-G(t))\,dt}_{D_2(t)\ \searrow}.$$

- $\displaystyle\int_0^\infty |D_1(t)|\,dt=\int_0^\infty(1-G(t))\,dt=\tau<\infty$

- $\displaystyle\int_0^\infty |D_2(t)|\,dt=\frac{1}{\tau}\int_0^\infty\int_t^\infty(1-G(x))\,dx\,dt$

$$=\frac{1}{\tau}\int_0^\infty\int_t^\infty\int_x^\infty G(u)\,du\,dx\,dt \qquad ,u>x,\ x>t$$

$$=\frac{1}{\tau}\int_0^\infty\int_0^u\int_0^x G(u)\,dt\,dx\,du$$

$$=\frac{1}{\tau}\int_0^\infty\int_0^u x\,G(u)\,dx\,du$$

$$=\frac{1}{\tau}\int_0^\infty G(u)\left(\int_0^u x\,dx\right)du=\frac{1}{\tau}\int_0^\infty G(u)\frac{u^2}{2}\,du=$$

$$=\frac{1}{2\tau}\int_0^\infty u^2G(u)\,du=\frac{1}{2\tau}(\tau^2+\sigma^2)<\infty.$$

Επομένως, $\int_0^{\infty} |D(t)|\,dt < \infty$

και $\int_0^{\infty} D(t)\,dt = \frac{\tau^2+6^2}{2\tau} - \tau$

οπότε $\lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\frac{\tau^2+6^2}{2\tau} - \tau}{\tau} = \frac{\tau^2+6^2-2\tau^2}{2\tau^2} = \frac{6^2-\tau^2}{2\tau^2}$