(*) → Μέλλιδο ασκήσεων στις Ουρές αναμονής στην e-class (Τα βασικά)

20/5/2013

Εισαγωγή στις Ουρές Αναμονής

(1) Πλαίσιο – Βασικά χαρακτηριστικά

Διαδικασία αφίξεων → $\boxed{\text{Εξυπηρέτηση}}$ → Διαδικασία αναχωρήσεων

πχ) Αεροδρόμιο
Γραμμή Παραγωγής
Ταμείο
Ιατρείο κτλ...

} Ουρά ≡ Στοχαστικό σύστημα εισόδου-εξόδου με διακριτές μονάδες.

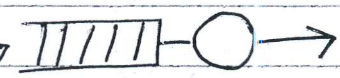
1) Διαδικασία αφίξεων → (Πως έρχονται? Poisson (M), Ανανεωτική διαδ (GI), Σταθεροί ενδιάμεσοι χρόνοι (D))
   Markovian/Memoryless (M)
2) Χρόνοι εξυπηρέτησης → (exp(M), Γενικοί (GI ή G), Σταθεροί (D))
3) Αριθμός υπηρετών → c
4) Χωρητικότητα → k
5) Πειθαρχία ουράς → First-Come-First-Served (FCFS/FIFO)
   Last-Come-First-Served (LCFS/LIFO)
   Service-In-Random-Order (SIRO)
   Shortest-Service-Time-First (SSTF)

Ονοματολογία Kendall

A / B / c / k (   )

↑ Αφίξ, ↑ Εξυπ, ↑ Υπηρ, ↑ Χωρητ, ↑ Πειθ

} Αν k παραλείπεται → k = ∞
  " Πειθ " → FCFS

πχ) M/M/1 → 

D/G/3/5 (SSTF)

a = Μέσος ενδιαμεσος χρόνος αφίξεων

$\lambda = \frac{1}{a}$ = Ρυθμός αφίξεων

b = Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

$\mu = \frac{1}{b}$ = Ρυθμός εξυπηρέτησης

(2) 3 διαφορετικές οπτικές

- Διαχειριστής (Πόσοι πελάτες βρίσκονται στο σύστημα)
- Πελάτης (Να εξυπηρετηθούν όσο το δυνατόν γρηγορότερα)
- Υπηρέτης (Να ξεκουράζονται που και που...)

(3) Τμ και σ.δ στις ουρές αναμονής

Διαχειρ.

$Q(t)$ = # πελ στο σύστημα τη στιγμή t
$Q_q(t)$ = # πελ σε αναμονή " " "
$Q_s(t)$ = # πελ σε διαδ. εξυπ. " " "

Πελάτης

t_i : χρόνος άφιξης του i πελάτη
τ_i : χρόνος αναχώρ. " " "
$S_i = \tau_i - t_i$: χρόνος παραμονής του i πελάτη (sojown time)
W_i = Χρόνος αναμονής του i πελάτη (waiting time)
X_i = Χρόνος εξυπηρέτησης του i πελάτη
$Q_i^- = Q(t_i^-)$ = # πελ. που βλέπει μπαίνοντας ο i πελάτης
$Q_i^+ = Q(\tau_i^+)$ = # πελ. που βλέπει φεύγοντας ο i πελάτης

Υπηρ

I = περίοδος αργίας του συστήματος
Y = περίοδος συνεχούς λειτουργίας
$Z = I + Y$ = κύκλος λειτουργίας του συστήματος

④ Μέτρα απόδοσης συστήματος (ουράς)

Χρόνος που περνά η $\{Q(t)\}$ στο n στο $[0,t]$.

• $P(Q=n) = P_n = \underbrace{\lim_{t\to\infty} P(Q(t)=n)}_{\text{οριακή πιθανότητα n πελ. στο σύστημα}} = \underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \mathbb{1}\{Q(u)=n\}du}{t}}_{\text{μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου με n πελ. στο σύστημα.}}$

• $E[Q] = \sum_n n P_n = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t Q(u)\,du}{t}$ ο μέσος αριθμός των πελατών στο σύστημα

Όμοια $E[Q_q]$, $E[Q_s]$

Το ποσοστό των πελατών που βλέπουν n πελάτες μπαίνοντας στο σύστημα.

• $r_n = \underbrace{\lim_{i\to\infty} P(Q_i^- = n)}_{\text{πιθ. σε στιγμή άφιξης πελάτη να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα.}} = \underbrace{\lim_{i\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{i} \mathbb{1}\{Q_i^- = n\}}{i}}_{\text{μακροπρόθεσμο ποσοστό πελατών που βλέπουν n μπαίνοντας στο σύστημα}}$

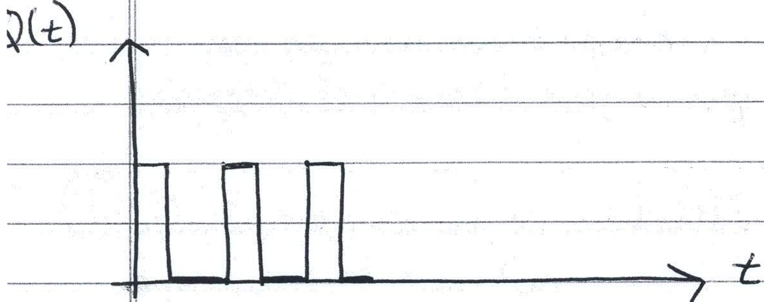
Ομοίως,

• $d_n = \underbrace{\lim_{i\to\infty} P(Q_i^+ = n)}_{\text{πιθ σε στιγμή αναχωρ να υπάρχουν n πελάτες. στο σύστημα}} = \underbrace{\lim_{i\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{i} 1\{Q_i^+ = n\}}{i}}_{\text{μακροπρόθεσμο ποσοστό πελατών που αφήνουν (πίσω τους) n βγαίνοντας από το σύστημα.}}$

(5) Διαφορά p_n, r_n, d_n.

Γενικά $(p_n) \neq (r_n) \neq (d_n) \neq (p_n)$

πχ) D/D/1 $a = 1$, $b = 0.1$



(p_n): $p_0 = 0.9$
$p_1 = 0.1$

$p_n = 0, n \geq 2$

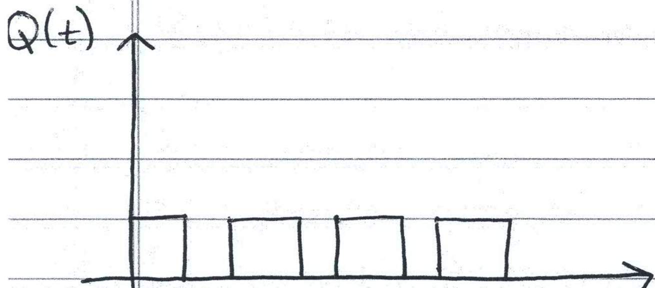
(r_n): $r_0 = 1$
$r_n = 0, n \geq 1$

(d_n): $d_0 = 1$
$d_n = 0, n \geq 1$

χρόνος από άφιξη σε άφιξη

χρόνος εξυπηρέτησης

D/D/1 $a = 1$, $b = 0.9$



(p_n): $p_0 = 0.1$
$p_1 = 0.9$

$p_n = 0, n \geq 2$

(r_n): $r_0 = 1$
$r_n = 0, n \geq 1$

(d_n): $d_n = 1$
$d_n = 0, n \geq 1$

Η εικόνα του πελάτη είναι ίδια σε 2 πολύ διαφ. συστήματα

(6) Μέτρα απόδοσης συστήματος (συνέχεια)

- $F_S(x) = \underbrace{\lim_{i \to \infty} P(S_i \le x)}_{\substack{\text{πιθανότητα χρόνος} \\ \text{παραμονής πελάτη} \\ \le x}} = \underbrace{\lim_{i \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{i} 1\{S_i \le x\}}{i}}_{\substack{\text{μακροπρόθεσμο ποσοστό πελατών} \\ \text{με χρόνο παραμονής } \le x.}}$

κατανομή χρόνου παραμονής

Όμοια,

$F_W(x) \leftarrow$ Κατανομή χρόνου αναμονής
$F_X(x) \leftarrow$ Κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης

(7) Βασικά αποτελέσματα

1) Ευστάθεια (Πότε σε ένα σύστημα δεν απειρίζεται η ουρά...)
(Πότε το πλήθος των πελατών στο σύστημα δεν εκρήγνυται)

2) Νόμος Little (Σχέση $E[Q]$, λ, $E[S]$)

3) Ιδιότητα μεμονωμ. αφίξεων (ικανή συνθήκη για $r_n = d_n$)

4) Ιδιότητα PASTA (ικανή συνθήκη για $r_n = p_n$)
Poisson Arrivals See
Time Averages

(8) Ευστάθεια - Ρυθμός συνωστισμού

GI/G/c σύστημα με λ: ρυθμός αφίξεων
b: μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

$\rho = \lambda b$: ρυθμός συνωστισμού
= έργο που εισέρχεται για διεκπεραίωση στο σύστημα ανα χρονική μονάδα.

Θεώρημα ευστάθειας

GI/G/c σύστημα με τυχαιότητα (όχι D/D/c σύστημα)
↳ που δεν υπάρχει τυχαιότητα

$\rho < c \iff$ ευστάθεια $\iff \exists\ (p_n), (r_n), (d_n)$ με $\sum_n p_n = \sum_n r_n = \sum_n d_n = 1$

$\rho \geq c \iff$ αστάθεια $\iff p_n = r_n = d_n = 0 \,,\ n \geq 0$