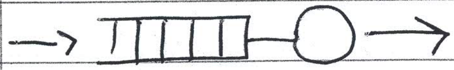
22/5/2013

Ουρές αναμονής

① Πλαίσιο



Q : # πελατών στο σύστημα

Q^- : # πελατών στο σύστημα πριν την άφιξη πελάτη

Q^+ : # πελατών στο σύστημα μετά την άφιξη πελάτη

$\rightarrow d_n = P(Q^+ = n)$

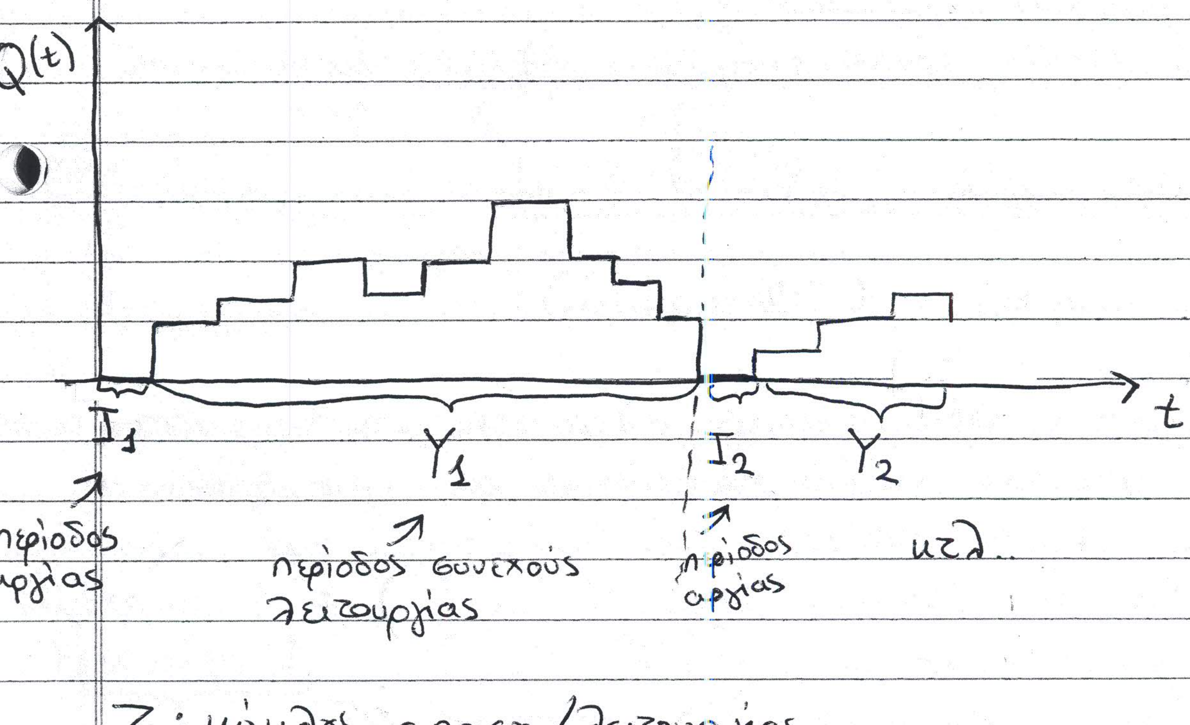
$\rightarrow r_n = P(Q^- = n)$

$\rightarrow p_n = P(Q = n)$

S : χρόνος παραμονής πελάτη

W : χρόνος αναμονής πελάτη

X : χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη



Z : κύκλος απασχ/λειτουργίας

Y : περίοδος συνεχούς λειτουργίας

I : περίοδος αργίας

② Βασικό αποτέλεσμα 1: Ευστάθεια

λ: ρυθμός αφίξεων
b: $E[X]$: μέσος χρόνος εξυπηρέτησης
ρ: λb: ρυθμός συνωστισμού

Θεωρ:

Σε $GI/G/c$ ουρά (c = # υπηρ), όχι $D/D/C$

$\rho < c \iff$ ευστάθεια $\iff \exists\, p_n, r_n, d_n > 0 \;\forall n$ κ $\Sigma = 1$

$\rho \geq c \iff$ αστάθεια $\iff p_n = r_n = d_n = 0$

③ Βασικό αποτέλεσμα 2: Νόμος του Little

$E[Q]$ = Μέσο # πελατών στο σύστημα
λ = ρυθμός αφίξεων
$E[S]$ = Μέσος χρόνος παραμονής πελατών στο σύστημα

Νόμος Little: $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

Ιδέα απόδειξης 1 (Οικονομική):

Έστω ότι κάθε πελάτης πληρώνει μία χρηματική μονάδα ανά χρονική μονάδα παραμονής του στο σύστημα.

Μέση είσπραξη διαχειρ. ανά χρον. μονάδα (με πληρωμή κατά την άφιξη) $=$ $\underbrace{\text{\# εισερχ. πελ. ανά χρονική μονάδα}}_{\lambda}$ $\cdot$ $\underbrace{\text{Πληρωμή 1 πελάτη}}_{E[S]}$

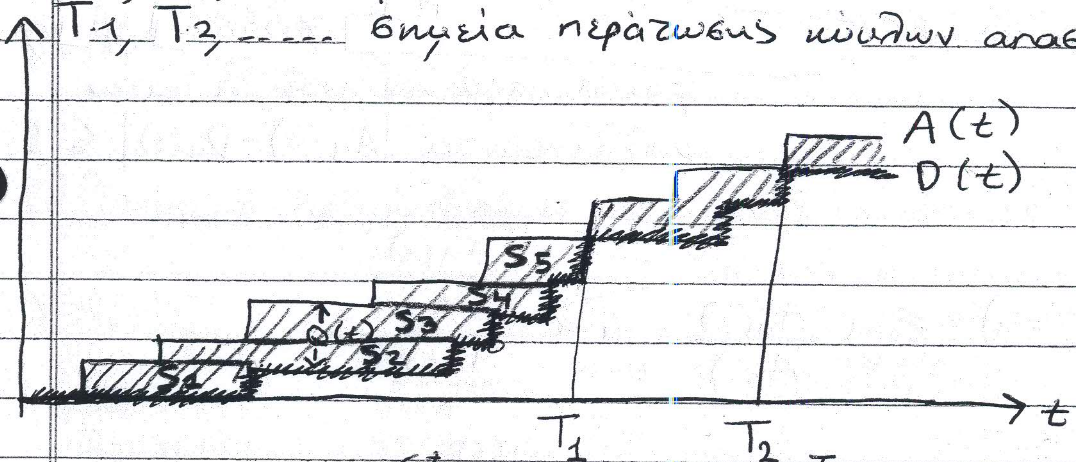
$\|$

Μέση είσπραξη ... (με πληρωμή σε κάθε χρονική μονάδα) $=$ $\underbrace{\text{\# πελατών}}_{E[Q]}$

(3) Ιδέα απόδειξης 2 (Ανανεωτική διαδικασία)

$A(t)$ = # αφίξεων ως τη στιγμή t
$D(t)$ = # αναχωρήσεων " " "
$Q(t)$ = # πελατών " " "

$S_1, S_2, \ldots$ χρόνοι παραμονής πελάτη
$T_1, T_2, \ldots$ σημεία περάτωσης κύκλων απασχόλησης



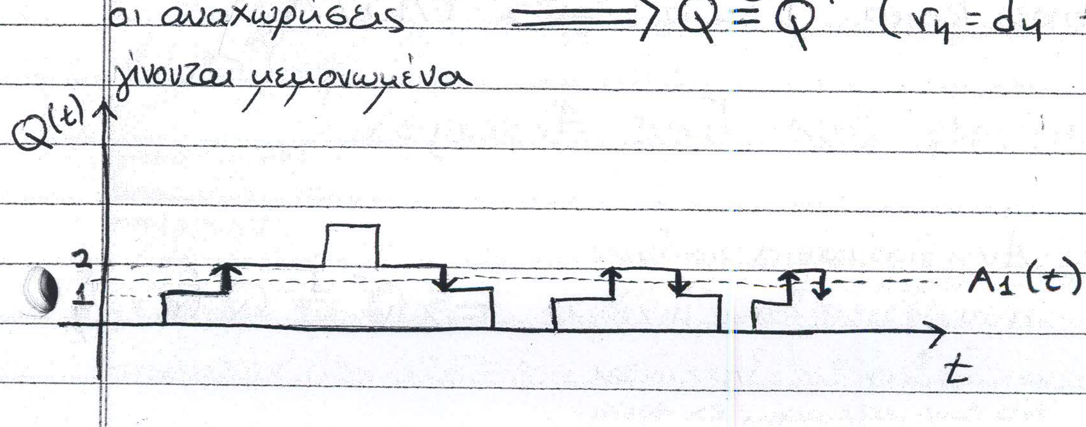
$$E[Q] = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t Q(u)du}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{T_n} Q(u)du}{T_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{A(T_n)} S_i}{T_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{A(T_n)}{T_n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{A(T_n)} S_i}{A(T_n)} = \lambda \cdot E[S]$$

(4) Βασικό αποτέλεσμα 3: Ιδιότητα Μεμονωμ. Μεταβάσεων

Θεώρημα:

Αν οι αφίξεις και οι αναχωρήσεις γίνονται μεμονωμένα $\Longrightarrow Q^- \overset{d}{=} Q^+ \quad (r_n = d_n \ \forall n)$



Απόδειξη:

$A(t) \doteq \#$ αφίξεων ως τη στιγμή t
$D(t) \doteq \#$ αναχωρήσεων " " " "
$A_n(t) \doteq \#$ αφίξεων " " " " που βλέπουν n πελάτες
$D_n(t) \doteq \#$ αναχωρήσεων " " " " " " " "

Μεμονωμένες μεταβάσεις: Διασχίσεις κάθε οριζόντιας γραμμής προς τα πάνω και προς τα κάτω εναλλάσσονται. $|A_n(t) - D_n(t)| \leq 1$

(βλέπε διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα)

$$r_n = P(Q^- = n) = \lim_{t\to\infty} \frac{A_n(t)}{A(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{A_n(t)}{t}}{\frac{A(t)}{t}}$$

$$d_n = P(Q^+ = n) = \lim_{t\to\infty} \frac{D_n(t)}{A(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{D_n(t)}{t}}{\frac{A(t)}{t}}$$

Όμως, $\lim_{t\to\infty} \frac{A_n(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{D_n(t)}{t}$ $\left(\text{από } |A_n(t) - D_n(t)| \leq 1\right)$

Επίσης,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{t} \quad \left(\text{διότι } \lim_{t\to\infty} \frac{\overbrace{Q(t)}^{=A(t)-D(t)}}{t} = 0 \text{ αλλιώς η ουρά θα απειριζόταν}\right)$$

5) Βασικό αποτέλεσμα 4: Ιδιότητα PASTA

Poisson Arrivals See Time Averages

Θεώρημα: Αν η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson και οι μελλοντικές αφίξεις δεν εξαρτώνται από την κατάσταση του συστήματος $\Longrightarrow Q^- \stackrel{d}{=} Q \quad (r_n = p_n)$

$$r_n = P(\bar{Q}=n) = \lim_{\substack{t\to\infty \\ \delta_t \to 0}} P\big(Q(t)=n \,|\, \underbrace{A(t,t+\delta_t)}_{\text{άφιξη στο } (t,\,t+\delta_t)}\big)$$

Θ. Bayes

$$= \lim_{\substack{t\to\infty \\ \delta_t \to 0}} \frac{P(Q(t)=n)\, P(A(t,t+\delta_t)\,|\,Q(t)=n)/\delta t}{P(A(t,t+\delta t))/\delta t}$$

διαιρώ με δt

$\to \lambda$

$\to \lambda$ (ρυθμός Poisson)

$$= P(Q=n) = p_n$$

⑥ Βασικές εφαρμογές

1) $E[Q_q] = \lambda\, E[W]$

$E[Q_q]$: μέσο πλήθος πελατών στο χώρο αναμονής

$E[W]$: μέσος χρόνος αναμονής

Για αυτό το σύστημα η "αναχώρηση" είναι ότι αρχίζεις και εξυπηρετείσαι.

$E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

→ Θεώρημα Little στο σύστημα "χώρος αναμονής"

2) $E[Q_s] = \lambda \cdot E[X]$

$E[Q_s]$: μέσο πλήθος πελατών στο χώρο εξυπηρέτησης

$E[X]$: μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

b

→ Θεώρημα Little στο σύστημα "χώρος εξυπηρέτησης"

3) GI/G/c σύστημα

$E[Q_s] = \rho$

$E[Q_s]$ = μέσο πλήθος απασχολημένων υπηρετών

Πλήθος απασχ. υπηρετών στο GI/G/c $\sim$ Bin(c, πιθανότητα ο υπηρέτης να είναι απασχολημένος)

Άρα: $c \cdot$ πιθανότητα απασχόλησης ενός υπηρέτη $= \rho$

$\Downarrow$

Μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που ένας υπηρέτης είναι απασχολημένος $=$ πιθανότητα απασχόλησης ενός υπηρέτη $= \frac{\rho}{c}$

4) <u>GI/G/1 σύστημα</u>

$E[Q_s] = \rho$

$\Rightarrow 0 \cdot P[Q_s = 0] + 1 \cdot P[Q_s = 1] = \rho$

$\Rightarrow P[Q_s = 1] = \rho$

$\Rightarrow P[Q \geq 1] = \rho$

$\Rightarrow 1 - P[Q = 0] = \rho$

$\Rightarrow P_0 = 1 - \rho$

Σε GI/G/1 σύστημα,

πιθανότητα κενού συστήματος $=$ μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που το σύστημα είναι κενό $= 1 - \rho$.