

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα I

Φυλλάδιο Ασκήσεων 1 - Ακαδημαϊκό έτος 2011–2012

Δεσμευμένη μέση τιμή - Πιθανογεννήτριες - Μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes

- (1) Ένας φοιτητής έχει n βιβλία, αριθμημένα ως $1, 2, \dots, n$. Το βιβλίο k έχει ακριβώς i τυπογραφικά λάθη με πιθανότητα $k^i / (k+1)^{i+1}$, όπου $i = 0, 1, 2, \dots$ και $k = 1, 2, \dots, n$. Ο φοιτητής διαλέγει ένα βιβλίο στην τύχη (ομοιόμορφα) και το διαβάζει. Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού των τυπογραφικών λαθών που θα βρει.
- (2) Μια κάλπη περιέχει a λευκά και b μαύρα σφαιρίδια. Αφού τραβήξουμε ένα σφαιρίδιο, το επανατοποθετούμε στην κάλπη αν είναι λευκό. Αν, όμως, είναι μαύρο, τότε βάζουμε στη θέση του ένα λευκό (από κάποια άλλη κάλπη). Έστω X_n ο αριθμός των λευκών σφαιριδίων στην κάλπη, αφού η διαδικασία έχει επαναληφθεί n φορές.
(α') Αποδείξτε ότι

$$E[X_{n+1}] = \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) E[X_n] + 1.$$

- (β') Βρείτε έναν 'κλειστό' τύπο για την $E[X_n]$.
- (3) Κάθε φορά που ρίπτεται ένα νόμισμα, προσγειώνεται ως 'κεφαλή' με πιθανότητα p και ως 'γράμματα' με πιθανότητα $1 - p$. Να υπολογιστεί ο μέσος αριθμός ρίψεων μέχρι να παρατηρηθεί μια σειρά από r συνεχόμενες κεφαλές.
- (4) Έστω X μια μη-αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή με πιθανογεννήτρια

$$P_X(z) = \frac{c}{6 - z - z^2}.$$

- (α') Να προσδιοριστεί η σταθερά c .
 - (β') Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E[X]$.
 - (γ') Να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x) = P(X = x)$, $x = 0, 1, 2, \dots$
 - (δ') Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X \text{ είναι άρτιος})$.
- (5) Έστω X, Y και Z ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με ρυθμούς λ, λ και μ αντίστοιχα, με $\lambda \neq \mu$. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της $X + Y + Z$ και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της.