Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι
Φυλλάδιο Ασκήσεων 3 - Ακαδημαϊκό έτος 2011–2012

Βασικοί υπολογισμοί στη διαδικασία Poisson - Δεσμευμένη κατανομή χρόνων των γεγονότων

(1) Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Για κάθε φυσικό αριθμό $n = 1, 2, \ldots$, να υπολογιστεί η πιθανότητα
$$P(N(1) = 1, N(2) = 2, N(3) = 3, \ldots, N(n) = n].$$

(2) Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Να υπολογιστεί η μέση τιμή
$$E[N(1)N(2)N(3)].$$

(3) Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και $S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι των γεγονότων της. Να αποδειχτεί ότι ο χρόνος πραγματοποίησης του τελευταίου γεγονότος πριν τη στιγμή t είναι
$$E[S_{N(t)}] = t - (1 - e^{-\lambda t})/\lambda.$$

(4) Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και $S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι των γεγονότων της. Να υπολογιστεί ως συνάρτηση του λ και του t, η μέση τιμή
$$E[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i].$$

(5) (**) Θεωρούμε ότι πελάτες φθάνουν σε ένα σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Κάθε πελάτης μενει στο σύστημα για εκθετικό χρόνο με παράμετρο μ και κατόπιν αναχωρεί. Οι εκθετικοί χρόνοι παραμονής των πελατών θεωρούνται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Αποδείξτε ότι ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα τη στιγμή t είναι $\frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})$.