Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι
Φυλλάδιο Ασκήσεων 5 - Ακαδημαϊκό έτος 2011–2012

Μη-ομογενής και σύνθετη διαδικασία Poisson

(1) Έστω $\{N(t)\}$ μη-ομογενής διαδικασία Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$, $t \geq 0$. Να υπολογιστεί η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής του χρόνου S_1 του πρώτου γεγονότος δεδομένου ότι $N(t) = 1$, δηλαδή η συνάρτηση $P(S_1 \leq x | N(t) = 1)$, $x \geq 0$.

(2) Έστω $\{N(t)\}$ μη-ομογενής διαδικασία Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t) = \lambda t$, $t \geq 0$ (γραμμική συνάρτηση ρυθμού). Έστω S_1 ο χρόνος του πρώτου γεγονότος. Να υπολογιστεί η $E[N(t)]$ και η $E[S_1]$.

(3) Έστω $\{N(t)\}$ μη-ομογενής διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda(t) = \lambda$ για $t \in [0,1] \cup [2,3] \cup [4,5] \cup \ldots$ και $\lambda(t) = 0$ για $t \in (1,2) \cup (3,4) \cup (5,6) \cup \ldots$. Έστω S_1 ο χρόνος του πρώτου γεγονότος.
   (α΄) Να υπολογιστεί η κατανομή του S_1, $P(S_1 \leq x)$, $x \geq 0$.
   (β΄) Να υπολογιστεί η κατανομή της $N(t)$, $t \geq 0$.
   (γ΄) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη μέση τιμή $E[S_1 | N(t) = n]$ για $0 \leq t \leq 2$.

(4) Έστω $\{N(t)\}$ διαδικασία Poisson ρυθμού λ και $Z_1, Z_2, \ldots$ ανεξάρτητες ισόνομες ακέραιες μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση πιθανότητας $p_j = P(Z_n = j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, πιθανογεννήτρια $P_Z(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j$, μέση τιμή $E[Z_n] = \mu_Z$ και διασπορά $Var[Z_n] = \sigma_Z^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Θέτουμε $\{Z(t)\}$ με $Z(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Z_n$, $t \geq 0$ να είναι η αντίστοιχη σύνθετη διαδικασία Poisson.
   (α΄) Να υπολογιστούν η $E[Z(t)]$ και η $Var[Z(t)]$ (συναρτήσει των λ, μ_Z και σ_Z).
   (β΄) Να υπολογιστεί η πιθανογεννήτρια $P_{Z(t)}(z)$ της $Z(t)$.
   (γ΄) Να αποδείξετε ότι οι πιθανότητες $r_k(t) = P(Z(t) = k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ δίνονται από το αναδρομικό σχήμα

$$\begin{aligned} r_0 &= e^{-\lambda t(1-p_0)}, \\ r_k &= \frac{\lambda t}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) p_{k-j} r_j, \ k \geq 1. \end{aligned}$$

(5) Έστω $\{N(t)\}$ διαδικασία Poisson ρυθμού λ και $Z_1, Z_2, \ldots$ ανεξάρτητες ισόνομες ακέραιες μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση πιθανότητας $P(Z_n = j) = (1-a)^{j-1} a$, $j = 1, 2, \ldots$ (γεωμετρική κατανομή). Θέτουμε $\{Z(t)\}$ με $Z(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Z_n$, $t \geq 0$ να είναι η αντίστοιχη σύνθετη διαδικασία Poisson. Να αποδείξετε ότι

$$P(Z(t) = k) = \sum_{r=1}^{k} \binom{k-1}{r-1} a^r (1-a)^{k-r} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^r}{r!}.$$