

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα I

Φυλλάδιο Ασκήσεων 6 - Ακαδημαϊκό έτος 2011–2012

Εισαγωγή στην ανανεωτική θεωρία - Ανανεωτική συνάρτηση

- (1) Έστω ότι η κατανομή ενδιάμεσων χρόνων μιας ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t)\}$ είναι η ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$. Να αποδειχθεί ότι

$$M(t) = E[N(t)] = e^t - 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

- (2) Έστω ότι η κατανομή $G(t)$ των ενδιάμεσων χρόνων μιας ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t)\}$ είναι μείγμα δυο εκθετικών με παραμέτρους λ και μ με πιθανότητες p και $1 - p$ αντίστοιχα, δηλαδή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$g(t) = p\lambda e^{-\lambda t} + (1 - p)\mu e^{-\mu t}, \quad t \geq 0.$$

Να βρεθεί τύπος για την ανανεωτική συνάρτηση $M(t) = E[N(t)]$, $t \geq 0$.

- (3) Έστω ότι η κατανομή $G(t)$ των ενδιάμεσων χρόνων μιας ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t)\}$ είναι Gamma με παραμέτρους r και λ , δηλαδή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$\frac{\lambda^r}{(r-1)!} t^{r-1} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$M(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{nr-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \right\}, \quad t \geq 0.$$

- (4) Ένα μηχάνημα έχει χρόνο ζωής που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ . Όταν χαλάσει (τελειώσει ο χρόνος ζωής του) ή φτάσει σε ηλικία T (T δοσμένο) τότε αντικαθίσταται από καινούργιο και ο χρόνος αντικατάστασης ακολουθεί την κατανομή Gamma με παραμέτρους r και μ , δηλαδή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$\frac{\mu^r}{(r-1)!} t^{r-1} e^{-\mu t}, \quad t \geq 0.$$

Κατόπιν το νέο μηχάνημα αρχίζει την ίδια πορεία, κ.ο.κ. Έστω ότι $N(t)$ είναι ο αριθμός των μηχανημάτων που έχουν χρησιμοποιηθεί μέχρι τη χρονική στιγμή t . Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t}$$

συναρτήσει των λ , T , μ και r .

- (5) Σε ένα αεροδρόμιο υπάρχει μια πιάτσα με λεωφορειάκια που αναχωρούν αμέσως μόλις γεμίσουν. Ένα λεωφορειάκι έχει χωρητικότητα N επιβατών και οι επιβάτες καταφθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ πελάτες το λεπτό. Να υπολογιστεί ο μακροπρόθεσμος μέσος αριθμός λεωφορείων που αναχωρεί ανά ώρα.