

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι

Φυλλάδιο Ασκήσεων 7 - Ακαδημαϊκό έτος 2011–2012

Ανανεωτική εξίσωση - Βασικό ανανεωτικό θεώρημα

- (1) Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $G(t)$, μέση τιμή ενδιάμεσων χρόνων τ και διασπορά ενδιάμεσων χρόνων σ^2 . Έστω, επίσης $M(t) = E[N(t)]$, $t \geq 0$ η αντίστοιχη ανανεωτική συνάρτηση και $H(t) = M(t) - \frac{t}{\tau}$, $t \geq 0$.
 - (α') Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $H(t)$ και να λυθεί.
 - (β') Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} (M(t) - \frac{t}{\tau})$ (συναρτήσει των τ και σ).
- (2) Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $G(t)$ και έστω $H(t) = E[N(t)(N(t) - 1)]$, $t \geq 0$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $H(t)$ και να λυθεί.
- (3) Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $G(t)$ και έστω $H(t) = P(N(t) \text{ είναι περιττός})$, $t \geq 0$.
 - (α') Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $H(t)$ και να λυθεί.
 - (β') Να υπολογιστεί η $P(N(t) \text{ είναι περιττός})$ στην περίπτωση που η $\{N(t)\}$ είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό λ .
 - (γ') Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} P(N(t) \text{ είναι περιττός})$.
- (4) Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $G(t)$ και ροές r -τάξης ενδιάμεσων χρόνων $E[X^r] = \mu'_r$, $r \geq 1$. Έστω επίσης $A(t) = t - S_{N(t)}$ ο αναδρομικός χρόνος ανανέωσης (παρελθών χρόνος ανανέωσης ή ηλικία της ανανεωτικής διαδικασίας) τη χρονική στιγμή t και $B(t) = S_{N(t)+1} - t$ ο προδρομικός χρόνος ανανέωσης (υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης της ανανεωτικής διαδικασίας). Θέτουμε $H(t) = E[A(t)B(t)]$, $t \geq 0$.
 - (α') Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $H(t)$ και να λυθεί.
 - (β') Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} E[A(t)B(t)]$ (συναρτήσει των μ'_r).
- (5) Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $G(t)$ και ροές r -τάξης ενδιάμεσων χρόνων $E[X^r] = \mu'_r$, $r \geq 1$. Έστω επίσης $A(t) = t - S_{N(t)}$ ο αναδρομικός χρόνος ανανέωσης (παρελθών χρόνος ανανέωσης ή ηλικία της ανανεωτικής διαδικασίας) τη χρονική στιγμή t . Θέτουμε $H(t) = E[A(t)^2]$, $t \geq 0$.
 - (α') Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $H(t)$ και να λυθεί.
 - (β') Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} E[A(t)^2]$ (συναρτήσει των μ'_r).