11/3/2016

Διαδικασία Poisson, δεσμευμένη κατανομή των χρόνων γεγονότων δεδομένου του αριθμού τους σε δοθέν διάστημα.

Ερώτημα

$N(t) = \#$ γεγονότων στο $(0,t]$

$(S_1, S_2, \ldots, S_n \mid N(t)=n) \overset{d}{=} ;$ → πότε έχουν συμβεί αυτά τα γεγονότα

Ειδικότερα μας ενδιαφέρουν:

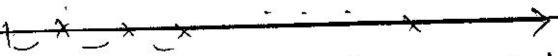
$f_{(S_k \mid N(t)=n)}(x) = ;$ → περιθώρια

$E[S_k \mid N(t)=n] = ;$

Εικασία: $E[S_k \mid N(t)=n] = \frac{kt}{n+1}$

Αν μας πουν ότι έχει συμβεί ένα γεγονός μέχρι την στιγμή t η μέση τιμή του χρόνου που συνέβη το γεγ θα είναι

Αν έχουν γίνει 2: $\frac{t}{3}, \frac{2t}{3}$



Εδώ έχω n-γεγονότα σε k+1 ίσα διαστήματα και με ενδιαφέρει που είναι το k-οστό

→ το πότε θα συμβεί το γεγονός αν ξέρω ότι έχει συμβεί ένα γεγονός ακολουθεί

Η $(S_1 \mid N(t)=1) \sim \text{Uniform}([0,t])$ κανονική κατανομή.

Οπότε, $(S_1, S_2, \ldots, S_n \mid N(t)=n) \overset{d}{=} (U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n})$ όπου

χρόνος 1ου γεγ, χρόνος 2ου

$U_1, U_2, \ldots, U_n \sim [0,t]$ ανεξ. η μικρότερη από αυτές

$U_{i:n} = $ συμβολισμός: η i-οστή μικρότερη των $U_1, \ldots, U_n$

δλδ i-διατεταγμένη των $U_1 \ldots U_n$

Διατεταγμένες τ.μ.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.μ

$X_{i:n} = $ η i-οστή μικρότερη = i-οστή διατεταγμένη τ.μ.

πχ. $X_{1:n} = \min(X_1, \ldots, X_n)$

$X_{n:n} = \max(X_1, \ldots X_n)$

Ερώτημα: Αν ξέρω την κατανομή της $(X_1, \dots, X_n)$ μπορώ να βρώ την κατανομή των $(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})$;

Απάντηση: Γενικά όχι

Αν $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες $\sim F(x)$ τότε

- $F_{X_{i:n}}(x) = P(X_{i:n} \leq x) = P(\text{τουλάχιστον } i \text{ από τις } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ να είναι } \leq x)$

$$= \sum_{k=i}^{n} P(\text{ακριβώς } k \text{ από τις } X_1, X_2, \dots X_n \text{ να είναι } \leq x)$$

από τις n διαλέγω τις k (τις συγκεκριμένες που θα είναι κάτω από x)

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} F(x)^k (1 - F(x))^{n-k}$$

→ άρνηση της $F(x)^k$

πιθανότητα η 1 να είναι $\leq x$ ες την k

για το ξέρω → $\boxed{\Rightarrow F_{X_{i:n}}(x) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} F(x)^k (1-F(x))^{n-k}}$

- Για την σ.π.π έχω:

$$f_{X_{i:n}} \overset{\text{ορσ.}}{=} \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X_{i:n} \leq x + \delta x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P\left(\underset{①}{\text{ακριβώς } i-1 \text{ από τις } X_1, \dots, X_n \leq x}, \underset{②}{\text{ακριβώς 1 να } \in (x, x+\delta x]}, \underset{③}{\text{υπόλοιπες } n-i \text{ να είναι } > x+\delta x}\right)}{\delta x}$$

$$= \binom{n}{i-1}\binom{n-i+1}{1}\binom{n-i}{n-i} F(x)^{i-1} \cdot f(x) \ (1 - F(x))^{n-i}$$

διαλέγω για το 1 διαλέγω για το 2 διαλέγω για το 3

οι $i-1$ είναι $\leq x$

οι τις (3) που θέλουν να είναι πάνω από x

η μία να ανήκει στο διάστημα προς το δx είναι η πυκνότητα

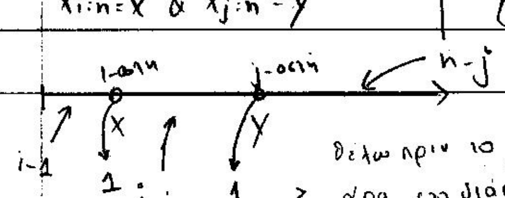
για το ξέρω → $\boxed{\Rightarrow f_{X_{i:n}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!\,1!\,(n-i)!} F(x)^{i-1} f(x) (1-F(x))^{n-i}}$

πως να το θυμάσαι: από τις n $(n!)$ θέλω να διαλέξω $i-1$ $((i-1)!)$, 1, $(1!)$ και $(n-i)$ $((n-i)!)$ αυτές: οι $i-1 \leq x \to F(x)^{i-1}$, μία ακριβώς να είναι $x \to f(x)$ και $n-i > x \to (1-F(x))^{n-i}$

Ερώτημα: (Όμοια) για $i<j$ τότε πόσο κάνει η:

$$f_{(X_{i:n}, X_{j:n})}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{n!\, F(x)^{i-1} f(x) (F(y)-F(x))^{j-i-1} f(y) (1-F(y))^{n-j}}{(i-1)!\,1!\,(j-i-1)!\,1!\,(n-j)!} \\ 0, \quad x \geq y \quad (\text{αφού } i<j \text{ θέλω και } x<y) \end{cases}$$

η από κοινού θέλω δλδ $X_{i:n} = x$ & $X_{j:n} = y$

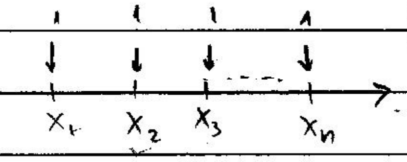


θέλω πριν το j να έχω $j-1$ όμως μέχρι το x έχω $i-1+1 = i$

άρα στο διάστημα θα έχω $j-i-1$

Ομοίως η από κοινού: ← για ενδιάμεσα διαστήματα δεν υπάρχει τίποτα

$$f_{(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})} = \begin{cases} n!\, f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n), & x_1 < x_2 < \dots < x_n \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



Διατεταγμένες τ.μ. τυχαίου δείγματος από ομοιόμορφες

Έστω ένα τυχαίο δείγμα $U_1, \dots, U_n \sim \text{Uniform}([0,t])$ ανεξάρτητες και $U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n}$ οι αντίστοιχες διατεταγμένες.

Υπενθύμιση: $f_U(x) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & 0 \leq x \leq t \\ 0, & \text{διαφορετικό} \end{cases}$

και $F_U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{t}, & 0 \leq x \leq t \\ 1, & x > t \end{cases}$

Άρα η από κοινού συνάρτηση θα είναι:

να το μάθω →
$$\boxed{f_{(U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n})}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & x_1 < \dots < x_n \\ 0, & \text{διαφορετικό} \end{cases}}$$

Και η περιθώρια:

$$f_{U_{i:n}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!\,1!\,(n-i)!} \left(\frac{x}{t}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{t} \cdot \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{n-i}, \quad 0 \leq x \leq t$$

την μάθουμε ⇝ $E[U_{i:n}] = \int_0^t x f_{U_{i:n}}(x)\,dx = \frac{n!}{(i-1)!(n-1)!} \int_0^t x\left(\frac{x}{t}\right)^{i-1} \frac{1}{t} \left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-1} dx$

$\overset{u=\frac{x}{t}}{=} \frac{n!\,t}{(i-1)!(n-i)!} \underbrace{\int_0^1 u^{i}(1-u)^{n-i}\,du}_{B(i+1,\,n-i+1)}$

Συνάρτηση Βήτα: $B(p,q) = \int_0^1 u^{p-q}(1-u)^{q} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

$= \frac{n!\,t}{(i-1)!\cancel{(n-i)!}} \cdot \frac{i!\,\cancel{(n-i)!}}{(n+1)!}$

$\boxed{E[U_{i:n}] = \frac{i\,t}{n+1}}, \quad 1 \le i \le n$

$\overset{[0,t]}{\longrightarrow} t$ Αν έχω διάστημα με n-ομοιόμορφες τότε η i-οσ… θα πέφτει εκεί πέρα που το χωρίζω σε ίσα κομμάτια, στο i κομμάτι. Το κά… κομμάτι είναι μήκους $\frac{t}{n}$ το i-οστό θα είναι $\frac{i \cdot t}{n+1}$

Θεώρημα Campell

Αν $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson(λ) και $S_1, S_2, \dots, S_n$ οι χρόνοι των γε… νότων τότε $(S_1, S_2, \dots, S_n \mid N(t)=n) \overset{d}{=} (U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n})$

όπου $U_{i:n}$ η i-οστή διατεταγμένη από ανεξάρτητες $U_1, U_2, \dots, U_n \sim Un$…

Αποδ

Αν δο $f_{(S_1,S_2,\dots,S_n \mid N(t)=n)}(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & x_1 < x_2 < \dots < x_n \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

προφανώς ⇝

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ με $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

$f_{(S_1,\dots,S_n \mid N(t)=n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{\delta x_1 \to 0^+, \delta x_2 \to 0^+, \dots, \delta x_n \to 0^+} \frac{P(x_1 < S_1 \le x_1+\delta x_1, \dots, x_n < S_n \le x_n+\delta x_n \mid N(t)=n)}{\delta x_1\,\delta x_2 \cdots \delta x_n}$

$= \lim_{\substack{\delta x_i \to 0^+ \\ i=1,2,\dots,n}} \frac{P(0 \text{ γεγ στο } [0,x_1],\ 1 \text{ γεγ στο } (x_1, x_1+\delta] \dots)}{\delta x_1\,\delta x_2 \cdots \delta x_n \cdot P(N(t)=n)}$ ⇝ η πιθ τομής την πιθ της δεσμευσης

$= \lim_{\substack{\delta x_i \to 0^+ \\ i=1,2,\dots,n}} \frac{e^{-\lambda x_1} e^{-\lambda \delta x_1}(\lambda \delta x_1) e^{-\lambda(x_2-x_1-\delta x_1)} e^{-\lambda \delta x_2}(\lambda \delta x_2) \cdots e^{-\lambda(t-x_n \dots)}}{\delta x_1\,\delta x_2 \cdots \delta x_n\, P(N(t)=n)}$

$= \lim_{\substack{\delta x_i \to 0^+ \\ i=1,2,\dots,n}} \frac{e^{-\lambda t}\lambda^n\,\delta x_1\,\delta x_2 \cdots \delta x_n}{\delta x_1\,\delta x_2 \cdots \delta x_n\, e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}$

$n!$

- Πρακτική θεώρηση του θ. Campell

Αν $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson και $S_1, S_2, \dots, S_n$ οι χρονοι των γεγονότων

$P((S_1, S_2, \dots, S_n) \in A \mid N(t)=n) = P((U_{1:n}, \dots, U_{n:n}) \in A)$

$E[f(S_1, S_2, \dots, S_n) \mid N(t)=n] = E[f(U_{1:n}, \dots, U_{n:n})]$

Εφαρμογές - παραδείγματα στην διαδικασία Poisson

1. Επιβάτες φτάνουν σε μια στάση συμφωνα με διαδ. Poisson. με ρυθμο 5 επιβ/λεπτο. Ξεκιναμε να παρατηρουμε τις αφιξεις στις 10:00. Ο χρονος που φτανει ο $60^{ος}$ ειναι 10:10

Ποια ειναι η αναμενομενη ωρα αφιξης του $20^{ου}$ επιβατη;

$70^{ου}$ επιβατη;

$$\underset{0}{0} \quad \overset{60^{ος}}{t=10}$$

$N(t) = \#$ πληθος αφιξεων απο τις 10:00 ως τις $10{:}\underline{t}$ → λεπτά

$E[S_{20} \mid S_{60}=10] = ;$

$E[S_{70} \mid S_{60}=10] = ;$

$$E[S_{20} \mid S_{60}=10] = E[S_{20} \mid N(10^-)=59, N(10)=60]$$

$$= E[S_{20} \mid N(10^-=59)]$$

$\theta.$ Campell. $= E[U_{20:59}]$ $\qquad U_i \sim [0, 10]$ $\qquad 10^- \; 10 \, 10$ με 10

$$= \frac{20 \cdot 10 \to t}{59+1}$$

$$= \frac{20\cancel{0}}{6\cancel{0}}$$

$$= 3,\overline{3}$$

Αρα αναμενομενη ώρα του $20^{ου}$ ειναι 10:03.20

$$E[S_{70} \mid S_{60}=10] = 10 + E[S_{70-60}] = 10 + \frac{10}{5} = 12$$

Αρα αναμενομενη ωρα του $70^{ου}$ ειναι 10:12