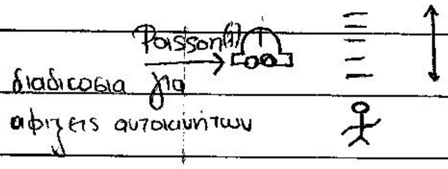
16/3/2016

2. Οι στιγμές που περνάνε τα αυτοκίνητα ακολουθούν δ. Poisson

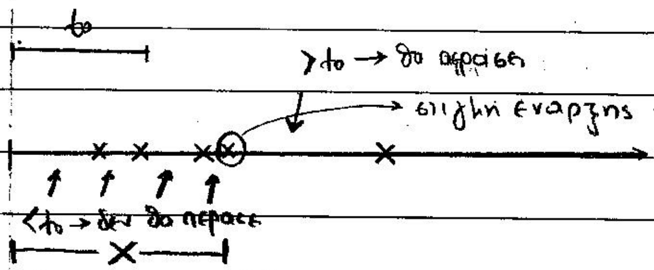


χρόνος διάβασης είναι t_0

Περνάει τη διάβαση μόνο αν στον επόμενο χρόνο t_0 δεν θα περάσουν αυτοκίνητα

X = χρόνος μέχρι να αρχίσει τη διάβαση

$E[X] = ;$



$X_1, X_2, \ldots \sim Exp(\lambda)$ οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αυτοκινήτων

$N(t)$ = # αυτοκινήτων ως τη χρονική στιγμή t

1ος τρόπος

$X = \sum_{i=1}^{N} X_i$ όπου N = # αυτοκινήτων πριν περάσει τη διάβαση

$$E[X] = E\Big[\sum_{i=1}^{\overset{\text{τ.μ.}}{N}} X_i\Big] = E\Big[E\Big[\sum_{i=1}^{N} X_i \,\Big|\, N\Big]\Big]$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P(N=n)\, E\Big[\sum_{i=1}^{N} X_i \,\Big|\, N=n\Big]$$

$\{N=0\} = \{X_1 > t_0\}$

$\{N=1\} = \{X_1 < t_0, X_2 > t_0\}$

• $P(N=n) = P(X_1 < t_0, X_2 < t_0, \ldots, X_n < t_0, X_{n+1} > t) \underset{exp(\lambda)}{\overset{\text{ανεξ}}{=}} (1-e^{-\lambda t_0})^n e^{-\lambda t_0}, \quad n \geq 0$

πιθανότητα επιτυχίας: $e^{-\lambda t_0}$
n: αποτυχίες μέχρι να περάσω.

→ γεωμετρική κατανομή (είναι ως προς το n)

n → τώρα είναι σταθερό - άρα κάνω την αλλαγή

• $E\Big[\sum_{i=1}^{N} X_i \,\Big|\, N=n\Big] = E\Big[\sum_{i=1}^{n} X \,\Big|\, N=n\Big] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid N=n]$

δεν μου λεει τίποτα για την X_i

$$= \sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid X_1 \le t_0, X_2 \le t_0, \ldots, X_n \le t_0, X_{n+1} > t_0]$$

μόνο η $X_i \le t_0$ μου δίνει πληρ. για την X_i

$$= \sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid X_i \le t_0]$$

πιθανότητα

Όμως, $E[X_i \mid X_i \le t_0] = \dfrac{E[X_i \cdot 1_{\{X_i \le t_0\}}]}{P(X_i \le t_0)}$

θέλω έως t_0 για να είναι x και όχι 0

x αν $X_i \le t_0$, 0 αλλιώς

$$= \frac{\int_0^{t_0} x \lambda e^{-\lambda x} dx}{1-e^{-\lambda t_0}}$$

θέλω να είναι η πυκνότητα της gamma $f(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}$, $x>0$ παω για $n=2$

$$= \frac{\frac{1}{\lambda} \int_0^{t_0} \frac{\lambda^2}{(2-1)!} x^{2-1} e^{-\lambda x} dx}{1-e^{-\lambda t_0}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\lambda} P(S_2 \le t_0)}{1-e^{-\lambda t_0}}$$

το X_i είναι ο χρόνος μεταξύ των γεγονότων. Το S_2 ο χρόνος που συνέβη το δεύτερο

βασική σχέση ενώνει το S_n με τα $N(t)$:

$$\boxed{\{S_n \le t\} = \{N(t) \ge n\}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\lambda} P(N(t_0) \ge 2)}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})}$$

$$= \frac{1 - e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})}$$

1 - (την πιθ. να έχει γίνει κανένα γεγονός + την πιθ να έχει γίνει ένα γεγονός)

Τελικά, $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N=n\right] = n \cdot \dfrac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})}$

- Άρα, $E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \cdot n \dfrac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})}$

$$= \frac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})}$$

$$= \frac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})} \cdot E[N]$$

- Για το $E[N]$: (πλήθος αποτυχιών μέχρι την 1η επιτυχία)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \overset{d/dx}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \overset{\cdot x}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Αρα, $E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \cdot n = \frac{1-e^{-\lambda t_0}}{e^{-\lambda t_0}}$

• Οποτε $E[X] = \frac{\cancel{1-e^{-\lambda t_0}}}{e^{-\lambda t_0}} \cdot \frac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda \cancel{(1-e^{-\lambda t_0})}}$

$$= \frac{e^{\lambda t_0} - 1}{\lambda} - t_0$$

2ος τρόπος (Ανανεωτικός συλλογισμός)

$E[X] = E[E[X \mid X_1]]$

$$= \int_0^{\infty} E[X \mid X_1 = x] \, \lambda e^{-\lambda x} \, dx$$

και $E[X \mid X_1 = x] = \begin{cases} 0 & ; \ x > t_0 \\ x + E[X] & , \ x \leq t_0 \end{cases}$

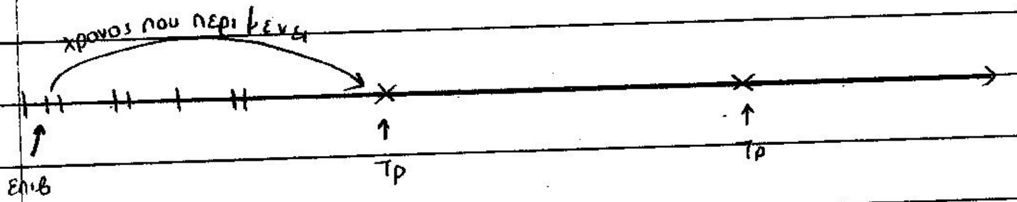
Αρα, $E[X] = \int_0^{t_0} (x + E[X]) \lambda e^{-\lambda x} \, dx = \int_0^{t_0} x \lambda e^{-\lambda x} dx + E[X] \underbrace{\int_0^{t_0} \lambda e^{-\lambda x} dx}_{6.k}$

$$= \frac{1}{\lambda} \left(1 - e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}\right) + E[X]\left(1 - e^{-\lambda t_0}\right)$$

$\Rightarrow e^{-\lambda t_0} E[X] = \frac{1 - e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda}$

$\Rightarrow E[X] = \frac{e^{\lambda t_0} - 1}{\lambda} - t_0$

3. Συρμοί διέρχονται σε σταθμό μετρό καθε 4 λεπτά. Επιβατες φθανουν ν σ.δ. Poisson με 30 επιβ/λεπτό.
Να βρεθεί ο μεσος χρονος αναμονής ολων των επιβατων μεταξυ διαδοχικων συρμών



Αν $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμου $\lambda = 30$ επιβ/λεπτό
και $S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι αφιξεων των επιβατων
και $t = 4$ λεπτά ο χρόνος μεταξύ των συρμων

Εχουμε: $X =$ Συνολ. χρονος αναμονής επιβατων

$$= \sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)$$

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i) \mid N(t)\right]\right]$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)}_{\text{το ξερω}} E\left[\sum_{i=1}^{\overset{\text{θα γινει } n}{N(t)}} (t - S_i) \mid N(t)=n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n) \sum_{i=1}^{n} \left(t - E[S_i \mid N(t)=n]\right)$$

$$\overset{\text{θ. Campell}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n) \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(t - E[U_{i:n}]\right) \quad (1)$$

οπου $U_{i:n}$ η i-οστη απο διατετ. απο n ανεξ ισον $U([0,t])$

1ος τροπος

Γνωριζουμε: $E[U_{i:n}] = \dfrac{it}{n+1}$

$$(1) \Rightarrow E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n) \sum_{i=1}^{n} \left(t - \frac{it}{n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\left(nt - \frac{n(n+1)t}{2(n+1)}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\cdot n \cdot \frac{t}{2}$$

$$= E[N(t)]\cdot \frac{t}{2}$$

$$= \lambda \cdot t \cdot \frac{t}{2}$$

$$= \frac{\lambda t^2}{2}$$

Αθροίζω τις μέσες τι/ές όλων των διατεταγ/ένων = τις μέσες τι/ές των αρχικ... δηλ. $= \sum_{i=1}^{n} E[U_i]$

2ος τρόπος

$$(1) \Rightarrow E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\left(nt - \left(\sum E[U_{i:n}]\right)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\left(nt - n\cdot\frac{t}{2}\right)$$

$$= \frac{\lambda t^2}{2}.$$

SOS. 4. Γεννήσεις σε μαιευτήριο με σ.δ. Poisson ρυθμού $\lambda = 24$ γεν.

(με υπέρθεση, διάσπαση. (μεγάλο πλήθος ανθρώπων που έρχονται με τυχαίο ρυθμό))

Σήμερα είναι 16 Μαρτίου

(i) P (12 γεν. σήμερα) = ;

(ii) P (12 γεν σήμερα | 30 γεν. 12-16 Μαρτίου) = ;

(iii) P (12 γεν σήμερα | 20 γεν 12-15 Μαρτίου) = ;

(iv) P (το 1° αγόρι σήμερα αντιστοιχεί στην 1η γεν) = ;

(v) E [χρονος μέχρι το 3° κορίτσι] = ;

Θα μετρώ το χρόνο σε μέρες $\lambda = 24$ γεν/μέρα

$N(t) = \#$ γεν. σε χρονο t

i) $P(N(1)=12) = e^{-24\cdot 1} \dfrac{(24\cdot 1)^{12}}{12!}$

ii) $P(N(5)-N(4)=12 \mid N(5)=30) = \dfrac{P(N(5)-N(4)=12,\ N(5)=30)}{P(N(5)=30)}$

$= \dfrac{P(N(5)-N(4)=12,\ N(4)=18)}{P(N(5)=30)}$

(ανεξ. προσαυξήσεις) $= \dfrac{P(N(5)-N(4)=12)\cdot P(N(4)=18)}{P(N(5)=30)}$

(Ομογ. προσαυξήσεις) $= \dfrac{P(N(1)=12)\,P(N(4)=18)}{P(N(5)=30)}$

$= \dfrac{\cancel{e^{-24\cdot 1}} \frac{(\cancel{24}\cdot 1)^{12}}{12!} \cdot \cancel{e^{-24\cdot 4}} \frac{(\cancel{24}\cdot 4)^{18}}{18!}}{\cancel{e^{-24\cdot 5}} \frac{(\cancel{24}\cdot 5)^{30}}{30!}}$

$= \binom{30}{12} \left(\frac{1}{5}\right)^{12} \left(\frac{4}{5}\right)^{18}$

διαλέγω από τις 30 για τις 12

με πιθ. $\frac{1}{5}$ οι 12 για να γίνουν σήμερα → μία μέρα στις 5

ανεξ (αχρηστη πληρ).

iii) $P(N(5)-N(4)=12 \mid \cancel{N(4)=20}) \overset{\text{ανεξ.}}{\underset{\text{προσ.}}{=}} P(N(5)-N(4)=12)$

$\overset{\text{ομογ}}{\underset{\text{προσ}}{=}} P(N(1)=1)$

$= e^{-24\cdot 1} \dfrac{(24\cdot 1)^{12}}{12!}$

με διάσπαση iv) P(το 1ο αγόρι σήμερα να αντιστοιχεί στην 5η γέννηση) =

$P(1^o \to K,\ 2^o \to K,\ 3^o \to K,\ 4^o \to K,\ 5^o \to A) =$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

v) E[χρόνος μέχρι το 3ο κορίτσι] = E[S_3 στην $\{N_k(t)\}$ των κορ

$= \dfrac{3}{\lambda_{κορ}} = \dfrac{3}{\lambda\cdot\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{24\cdot\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{12}$