30/3/2016

Εισαγωγή στην Ανανεωτική διαδικασία

Ολοκλήρωμα L-S

Μέση τιμή

διακριτή, συνεχής

$X \geq 0$ τ.μ. με σ.κ $F_x(x)$, σ.π $p_x(x)$, σ.π.π. $f_x(x)$ (μεικτή)

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} p(x) + \int_A f(x)dx = \int_A dF(x) \rightarrow \text{συμβολισμός}$$

$$E[g(X)] = \sum_x g(x)p(x) + \int_0^\infty g(x)f(x)dx = \int_0^\infty g(x)dF(x)$$

Μετασχηματισμός L-S

$$\tilde{F}_x(s) = E[e^{-sX}] = \int_0^\infty e^{-sx} dF_x(x)$$

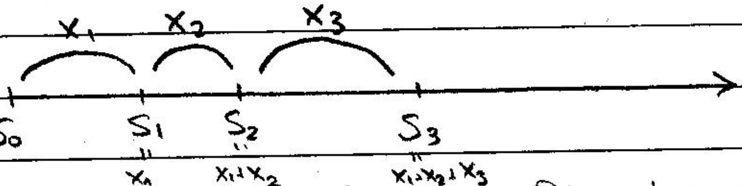
$$= \sum_x e^{-sx} p_x(x) + \int_0^\infty e^{-sx} f_x(x)dx$$

Ζεύγη τ.μ. και μετασχηματισμός L-S

τ.μ. X	Μετ. LS $\tilde{F}_x(s)$	Σ.κ $F_x(x)$	Σ.π. $p_x(x)$	Σ.π.π f_x
• $X = \begin{cases} X_1, \text{ με πιθ. } p_1 \\ X_2, \text{ με πιθ. } p_2 \\ \vdots \\ X_n, \text{ με πιθ. } p_n \end{cases}$	$\tilde{F}_x(s) = \sum_{i=1}^n p_i \tilde{F}_{X_i}(s)$	$F_x(x) = \sum_{i=1}^n p_i F_{X_i}(x)$	$p_x(x) = \sum_{i=1}^n p_i\, p_{X_i}(x)$	$f_x(x) = \sum_{i=1}^n p_i$
• $X = \underbrace{X_1 + \dots + X_n}_{\text{ανεξ}}$	$\tilde{F}_x(s) = \prod_{i=1}^n \tilde{F}_{X_i}(s)$	$F_x(x) = (F_{X_1} * \dots * F_{X_n})(x)$		
• $X \sim Exp(\lambda)$	$\tilde{F}_x(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$	$F_x(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x>0$		$\lambda e^{-\lambda x}, x>$
• $X \sim Erlang(n, \lambda)$	$\tilde{F}_x(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$	$F_x(x) = \sum_{k=n}^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}$		$\frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e$
•	$\tilde{F}_x(s) = \frac{1}{s}$ $\longleftrightarrow$	$F(x) = x \rightarrow \int_0^\infty e^{-sx} dF(x) = \int_0^\infty e^{-sx} dx = \frac{1}{s}$		

Ορισμοί

- Έστω $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες, ισόνομες, ≥ 0 τ.μ. με σ.κ $F_X(x)$.
Η $\{S_n : n \geq 0\}$ με $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$



λέγεται ανανεωτική ακολουθία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων F_X

- Η $\{N(t) : t \geq 0\}$ με $N(t) = \#$ γεγονότων στο $(0, t]$ λέγεται
$= \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$
(απαριθμήτρια) ανανεωτική διαδικασία

- Η $M(t) = E[N(t)] =$ Μέσο πλήθος γεγονότων στο $(0, t]$ λέγεται ανανεωτική συνάρτηση

Αν $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$ ($X_i \sim Exp(\lambda)$) τότε η $\{N(t)\}$ είναι σ.δ. Poisson ρυθμού λ.

Βασικοί υπολογισμοί

$$F_{S_n}(x) = P(S_n \leq x) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x)$$
$$= \underbrace{F_X * F_X * \dots * F_X}_{n \text{ φορές}}(x) = F_X^{*n}(x)$$

όπου,
$$(F * G)(t) = \int_0^t F(t-x)\, dG(x) \quad \text{συνέλιξη}$$

πχ: $X \overset{\geq 0}{\sim} F_X$, $Y \overset{\geq 0}{\sim} F_Y$ $\quad P(X+Y \leq t) = \int_0^t \underbrace{P(X + x \leq t \mid Y = x)}_{F_X(t-x)}\, dF_Y(x)$ → αν είναι συνεχής είναι ολοκλ → " " διακριτή θα γίνει αθ

▶ $P_n(t) = P(N(t)=n) = P(S_n \leq t < S_{n+1}) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$
$= F_x^{*n}(t) - F_x^{*(n+1)}(t)$

▶ $M(t) = E[N(t)] = E[\sum_{n=1}^{\infty} 1\{S_n \leq t\}] = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{E[1\{S_n \leq t\}]}_{P(S_n \leq t)}$
$= \sum_{n=1}^{\infty} F_x^{*n}(t)$

Αντίστοιχοι μετασχηματισμοί L-S

▶ $\tilde{F}_{S_n}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dF_{S_n}(t) \qquad = (\tilde{F}_x(s))^n$

▶ $\tilde{P}_n(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dP_n(t) \qquad = (\tilde{F}_x(s))^n - (\tilde{F}_x(s))^{n+1}$

▶ $\tilde{M}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dM(t) \qquad = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{F}_x(s))^n = \frac{\tilde{F}_x(s)}{1-\tilde{F}_x(s)}$?

Υπολογισμοί στην πράξη

Αν έχω την $F_x(x)$ μιας ανανεωτικής διαδ. και θέλω $F_{S_n}(t)$, $P_n(t)$, $M(t)$ τότε:
1) Βρίσκω $\tilde{F}_x(s)$
2) Εφαρμόζω τους τύπους για $\tilde{F}_{S_n}(s)$, $\tilde{P}_n(s)$, $\tilde{M}(s)$
3) Αντιστρέφω το μετ. L-S (με χρήση του πίνακα στην προηγούμενη σελίδα)

Παραδείγματα

1) $X \sim Exp(\lambda)$, $\quad F_x(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x>0$
$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x>0$

$\tilde{F}_x(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, dF_x(x) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)x}\, dx = \frac{\lambda}{s+\lambda}$

$\tilde{F}_{S_n}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n \rightsquigarrow F_{S_n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$

- $\tilde{P}_n(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n - \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{n+1} \rightsquigarrow P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$

- $\tilde{M}(s) = \dfrac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1-\frac{\lambda}{\lambda+s}} = \dfrac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{\frac{s}{\lambda+s}} = \dfrac{\lambda}{s} \rightsquigarrow M(t) = \lambda t$

2) $X \sim \text{Erlang}(2,\lambda)$, $f_X(x) = \frac{\lambda^2}{1!} x e^{-\lambda x}$, $x>0$

$\tilde{F}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_X(x)\,dx = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2$ (γινόμενο των $\tilde{F}$ δύο ανεξ. εκθετικών με παράμετρο λ) αφού η $Er(2,\lambda)$ είναι άθροισμα 2 εκθ. ...)

- $\tilde{F}_{S_n}(s) = \left(\tilde{F}_X(s)\right)^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{2n} \rightsquigarrow F_{S_n}(t) = \sum_{k=2n}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$

- $\tilde{P}_n(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{2n} - \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{2(n+1)} \rightsquigarrow P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{2n}}{(2n)!} + e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

- $\tilde{M}(s) = \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2}{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2} = \dfrac{\frac{\lambda^2}{\cancel{(\lambda+s)^2}}}{\frac{(\lambda+s)^2-\lambda^2}{\cancel{(\lambda+s)^2}}} = \dfrac{\lambda^2}{2\lambda s+s^2} = \dfrac{\lambda^2}{s(2\lambda+s)}$;

$\tilde{M}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2\lambda} = \frac{\lambda^2}{s(s+2\lambda)} \Rightarrow \frac{A(s+2\lambda)+Bs}{s(s+2\lambda)} = \frac{\lambda^2}{s(s+2\lambda)}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A\cdot 2\lambda = \lambda^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{\lambda}{2} \\ A = \frac{\lambda}{2} \end{cases}$

Τελικά, $\tilde{M}(s) = \frac{\lambda/2}{s} - \frac{\lambda/2}{s+2\lambda} = \frac{\lambda}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{\cancel{\lambda}}{2\cdot 2\cancel{\lambda}}\,\frac{2\lambda}{s+2\lambda} \rightsquigarrow M(t) = \frac{\lambda}{2}t - \frac{1}{4}(1-e$

3) $X = \begin{cases} 0, & \text{με πιθ } 1-r \\ Exp(\lambda), & \text{με πιθ } r \end{cases}$

התמ' L-S של 0 : $e^{-s\cdot 0}$

$$\tilde{F}_X(s) = (1-r)\cdot 1 + r\,\frac{\lambda}{\lambda+s} = \frac{\lambda+(1-r)s}{\lambda+s}$$

- $$\tilde{F}_{S_n}(s) = \left(\frac{\lambda+(1-r)s}{\lambda+s}\right)^n = \left((1-r)\cdot 1 + r\,\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^k$$

$$\Rightarrow F_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k \sum_{j=k}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

- $$\tilde{M}(s) = \frac{\frac{\lambda+(1-r)s}{\lambda+s}}{1-\frac{\lambda+(1-r)s}{\lambda+s}} = \frac{\lambda+(1-r)s}{\lambda+s-\lambda-(1-r)s} = \frac{\lambda+(1-r)s}{rs} = \frac{\lambda}{rs} + \frac{(1-r)}{r}$$

$$\Rightarrow M(t) = \frac{\lambda r}{t} + \frac{(1-r)}{r}$$