6|4|2016

Μελέτη Ανανεωτικών Διαδικασιών
Οριακή Θεωρία - Βασικά Εργαλεία

Υπενθύμιση

$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ανεξ. ισον $\sim G(x)$: ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των γεγονότων

$S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$: χρονοι των γεγονότων

$N(t) = \#$ γεγ. στο $(0, t]$

$F_{S_n}(x)$, $P_n(t) = P(N(t) = n)$, $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ανανεωτική συνάρτηση}}}{M(t)} = E[N(t)]$

Βασικά οριακά θεωρήματα στην Θ. Πιθ.

1) Νόμος μεγάλων αριθμών (ΝΜΑ)

$X_1, X_2, \ldots$ ανεξ. ισον τ.μ. με $E[X_i] = \mu$

Τότε $P\left(\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \mu \right) = 1$

2) Κεντρικό οριακό θεώρημα (ΚΟΘ)

$X_1, X_2, \ldots$ ανεξ. ισον τ.μ. με $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) = \Phi(x),$$ όπου $\Phi(x)$ η σ.κ της $N(0,1)$

Ανάλογα αποτελέσματα στην Ανανεωτική Θεωρία

$\{N(t)\}$ ανάν. διαδ. με ενδιάμεσους χρόνους X_i, $E[X_i] = \tau$, $Var[X_i] = \sigma$

Σπανίως δουλεύουμε με αυτά τα 2 αποτελέσματα.

1) **ΝΜΑ:** $P\left(\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau}\right) = 1$

Αφού οι χρόνοι μεταξύ των γεγονότων είναι τ αν θέλω να βρω πόσα γεγονότα έχουν συμβεί : $N(t) \simeq \frac{t}{\tau}$ (διαισθητικά το παραπάνω)

2) **Κ.Ο.Θ.:** $\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{N(t) - \frac{t}{\tau}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\tau^3}t}} < x\right) = \Phi(x)$

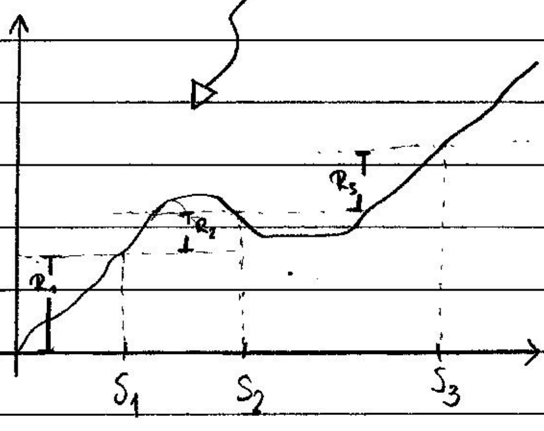
SOS 3 βασικά εργαλεία (θα πέσει σίγουρα ένα από τα τρία)

1) Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με Αμοιβές

$\{N(t)\}$ ανάν. διαδ. με ενδιάμ. χρόνους $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ. ίσον. με $E[X_i] = \tau$ και υπάρχει και μία $\{R(t)\}$ στοχ. διαδ. αμοιβών σχετιζόμενη με την $\{N(t)\}$ ως εξής:

Αν $R_n = R(S_n) - R(S_{n-1})$: Αμοιβή που συσσωρεύτηκε κατά τον ενδιάμεσο χρόνο X_n

Τότε οι τ.μ. (X_n, R_n), $n \geq 1$ είναι ανεξ. και ισον. με $E[X_n] = \tau$, $E[R_n] = r$



μέση αμοιβή ανά χρονική μονάδα

Τότε $\boxed{\lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R_n]}{E[X_n]}}$

Μακροπροθεσμη μέση αμοιβή ανά χρονική μονάδα

* Η ειδική περίπτωση όπου $R(t) = N(t)$ δίνει: $\lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{\tau}$

και αναφέρεται ως στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα

(R_n σε αυτή την περίπτωση: $R_n = R(S_n) - R(S_{n-1}) \Leftrightarrow R_n = N(S_n) - N(S_{n-1})$
$\Leftrightarrow R_n = n - (n-1) \Leftrightarrow R_n = 1$

διότι τη χρονική στιγμή S_n έχουν συμβεί n γεγονότα και την S_{n-1}, n-1 γεγ.)

Παράδειγμα 1

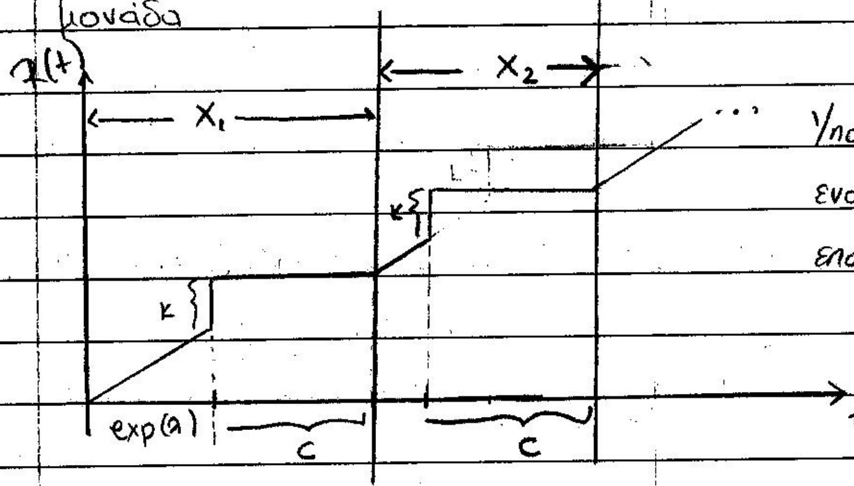
Μηχάνημα έχει χρόνο λειτουργίας ~ $Exp(\lambda)$

Χαλάει → Αντικαθίσταται με χρόνο αντικατάστασης = c

Κόστος αντικατάστασης = K

Δαπάνη λειτουργίας του μηχανήματος ανά χρονική μονάδα: k (μόνο όταν λειτουργεί μας ενδιαφέρει αυτό)

Μακροπρόθεσμο κόστος χρησιμοποίησης του μηχανήματος ανά χρονική μονάδα



Υπάρχει περιοδικότητα. Όταν κλείσει ένας κύκλος λειτουργίας και επισκευής επαναλαμβάνεται.

$R(t)$ = Κόστος που συσσωρεύτηκε στο $(0, t]$

Αν S_n ο χρόνος που η μηχανή τελειώνει την επισκευή για n-οστή φορά τότε οι $S_1, S_2, \ldots$ είναι ανανεωτική ακολουθία.

$X_n = S_n - S_{n-1}$: ενδιάμεσοι χρόνοι

Έχω $R_n = R(S_n) - R(S_{n-1})$ κ' $X_n = Y_n + c$

$= k \cdot \underbrace{Y_n}_{\sim exp(\lambda)} + K$

Ισχύει ότι (X_n, R_n), $n \geq 1$ ανεξ. ισον (το ζεύγη όχι μεταξύ τους τα X_n, R_n)

Άρα, Μακροπρόθεσμο μέσο κόστος χρήσης ανά χρον. μον. $= \lim_{t \to \infty} \dfrac{E[R(t)]}{t}$

$$\overset{\Sigma A \Theta A}{=} \frac{E[R_n]}{E[X_n]}$$

$$= \frac{k \cdot \frac{1}{\lambda} + K}{\frac{1}{\lambda} + c}$$

Παράδειγμα 2

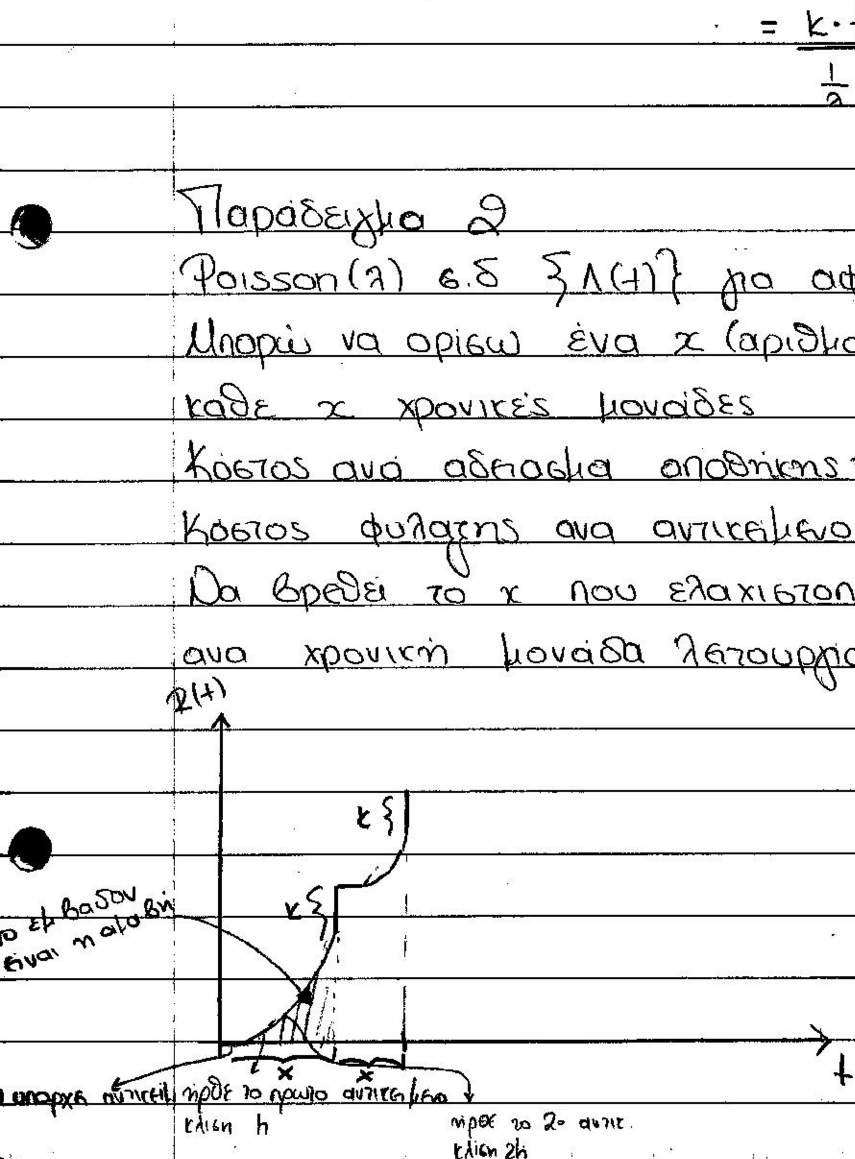
Poisson(λ) σ.δ $\{\Lambda(t)\}$ για αφίξεις αντικειμένων σε αποθήκη

Μπορώ να ορίσω ένα x (αριθμός) ώστε η αποθήκη να αδειάζει κάθε x χρονικές μονάδες

Κόστος ανά άδειασμα αποθήκης $= K$

Κόστος φύλαξης ανά αντικείμενο και χρονική μονάδα $= h$

Να βρεθεί το x που ελαχιστοποιεί το μακροπρόθεσμο κόστος ανά χρονική μονάδα λειτουργίας της αποθήκης.



$R(t)$: Συνολικό κόστος στο $(0,t]$

$X_n = x$

$R_n = K + \int_0^x h\Lambda(u)\,du$

$\Lambda(u) = \#$ αντικειμένων που ήρθαν μετά την τελευταία εκκαθάριση της αποθήκης

Άρα (X_n, R_n), $n \geq 1$ ανεξ. ισον. και επομένως:

Μακροπρόθεσμο μέσο κόστος λειτουργίας αποθήκης ανά χρονική μονάδα $= \lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} \overset{\Sigma A\Theta A}{=} \frac{E[R_n]}{E[X_n]}$

$$= \frac{k + \frac{\lambda h x^2}{2}}{x} = \frac{k}{x} + \frac{\lambda h x}{2}$$

Διότι, $E[X_n] = x$

$$E[R_n] = E\left[k + \int_0^x h\Lambda(u)\,du\right] = k + \int_0^x h\, \underbrace{E[\Lambda(u)]}_{\lambda \cdot u}\, du$$

$$= k + \lambda h \frac{x^2}{2}$$

Για την συνάρτηση $f(x) = \frac{k}{x} + \frac{\lambda h x}{2}$ έχω:

$f'(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{\lambda h}{2}$ και $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2k}{\lambda h}}$

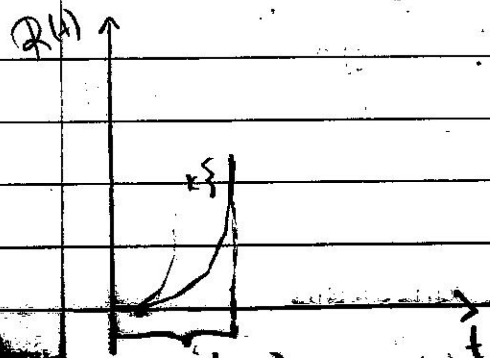
$f''(x) = 2\frac{k}{x^3} > 0.$

Άρα το $\sqrt{\frac{2k}{\lambda h}}$ είναι βέλτιστο.

Παράδειγμα 3

Ίδιο σενάριο με το παράδειγμα 2, αλλά η αποθήκη θα αδειάζει όταν συσσωρεύονται m αντικείμενα και ζητάμε το βέλτιστ

m.



R(t) = κόστος λειτουργίας της αποθήκης στο (0,

$X_n \sim \text{Erlang}(m, \lambda)$

$$R_n = K + \int_0^{X_n} h \cdot \Lambda(u)\,du$$

(X_n, R_n), $n \geq 1$, ανεξ κ; ισον

$$E[X_n] = \frac{m}{\lambda}$$

δεν ειναι ανεξαρτητες αρα η διπλη μεση τιμη ειναι δυσκολη

$$E[R_n] = K + E\left[\int_0^{X_n} h\Lambda(u)\,du\right] = K +$$

$$\sum_{i=1}^{m} h \cdot \underbrace{E[\text{χρονος αναμονης } i\text{-πελατη}]}_{= \frac{m-i}{\lambda}}$$

ο πρωτος πελατης εχει μεσο χρονο (m-1)/λ, ο δευτερος (m-2)/ μεση τιμη της Erlang (m-1, λ) ...

Άρα $E[R_n] = K + \frac{h}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} (m-i) = K + \frac{h}{\ell} \frac{(m-1)m}{2}$

Μακροπροθεσμο κοστος λειτουργιας $= \lim_{t \to \infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R_n]}{E[X_n]} = \frac{K + \frac{h}{\ell} \frac{(m-1)m}{2}}{\frac{m}{\ell}}$

$$= \frac{K\lambda}{m} + \frac{h(m-1)}{2}$$

Βελτιστοποιειται ως προς m ομοια με πριν (ο ακέραιος που ει
η λιγο πριν ή λιγο μετά)