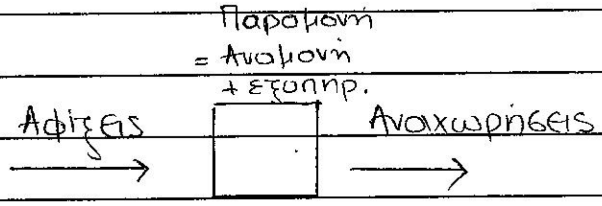
20/4/2016

Εισαγωγή στις Ουρές Αναμονής

μωβ → ## Βασικά στοιχεία

Ουρά Αναμονής = Στοχαστικό δυναμικό σύστημα εισόδου-εξόδου με διακριτές μονάδες



πχ. Αεροδρόμια, Τηλεφωνικά κέντρα, Ταμείο σε τράπεζα, Νοσοκομείο κλπ

5 χαρακτηριστικά:

1) Διαδ. αφίξεων (Ντετερμινιστική (πχ ραντεβού), Poisson, Ανανεωτική)
2) Χρόνοι εξυπηρέτησης (Σταθεροί, Εκθετικοί, Γενικοί)
3) Πλήθος (παράλληλων) υπηρετών (πόσοι "υπηρέτες" βρίσκονται για να εξυπηρετήσουν)
4) Χωρητικότητα (πόσοι χωράνε σε εξυπηρέτηση + αναμονή συνολικά)
5) Πειθαρχία ουράς (= τρόπος επιλογής πελάτη προς εξυπηρέτηση)

συνηθέστερα →
- FCFS First-Come-First-Served
- LCFS Last-Come-First-Served
- SIRO Service-In-Random-Order
- SSTF Shortest-Service-Time-First

μωβ → Ονοματολογία Kendall

$$A \,/\, B \,/\, C \,/\, K \;(\quad)$$

Διαδ. αφίξεων → A, Χρονοι εξυπηρ. → B, # υπηρ. → C, χωρητικοτ. → K, πειθαρχία → ( )

Διαδ. αφίξεων	Χρονοι εξυπηρ.
D: σταθεροί ενδιάμ. χρόνοι αφίξεων	D: σταθεροί χρον. εξυπ.
M: διαδ. αφίξεων Poisson	M: εκθετ. ανεξαρ χρον. εξυπ.
GI: αναν διαδ. ή G αφίξεων	GI: γενικοί ανεξ. χρον. εξυπ

Όταν:
- $K = \infty$ → Παραλείπεται
- πειθαρχία = FCFS → Παραλείπεται

πχ M/D/1/5 (LCFS)

D/G/1 (χρονοι αφιξ σταθ, χρον. εξυπηρ γενικοί, 1 υπηρ, απειρη χωρητ, FCFS)

μωβ → Ρυθμοί

a = Μέσος ενδιάμ. χρ. αφίξεων
b = Μέσος χρόνος εξυπ.
$\lambda = \frac{1}{a}$ = Ρυθμός αφίξεων (και ρυθμός αναχωρήσεων όταν το σύστημα είναι ευσταθές)
$\mu = \frac{1}{b}$ = Ρυθμός εξυπηρέτησης

μωβ → Οι 3 οπτικές

- Διαχειριστής
- Πελάτης
- Υπηρέτης

μωβ ~ Τυχαίες μεταβλητές

1) Διαχειριστής

$Q(t)$: # πελατών στο σύστημα

$Q_q(t)$: # πελατών σε αναμονή

$Q_s(t)$: # πελατών σε εξυπηρέτηση

queue

serve

2) Πελάτης

t_n : χρονική στιγμή άφιξης

τ_n : χρονική στιγμή αναχώρησης

$S_n = \tau_n - t_n$: χρόνος παραμονής

W_n = χρόνος αναμονής

X_n = χρόνος εξυπηρέτησης

$Q_n^- = Q(t_n^-)$: # πελατών στο σύστημα που βρίσκει ο n

$Q_n^+ = Q(t_n^+)$: # πελατών στο σύστημα που αφήνει ο n

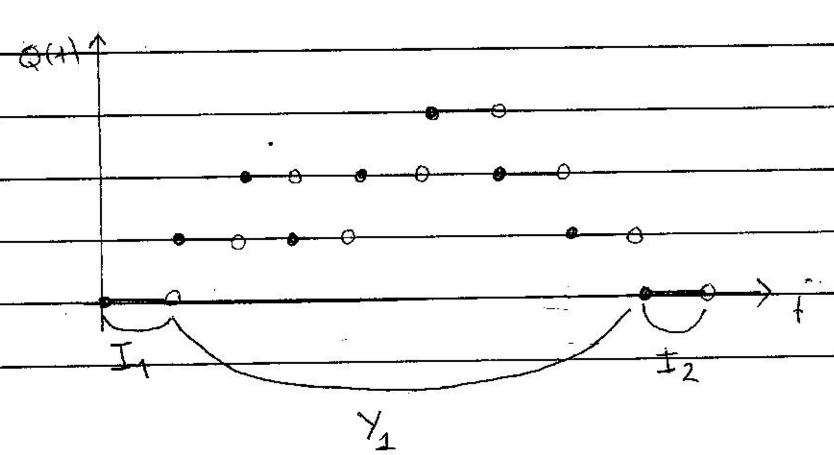
για τον n-οστό πελάτη

3) Υπηρέτης

I_n : n-οστή περίοδος αργίας

Y_n : n-οστή περίοδος συνεχούς λειτ.

$Z_n = I_n + Y_n$: n-οστός κύκλος λειτ.



μωβ → Μέτρα απόδοσης

• $P_n = \lim_{t \to \infty} P(Q(t)=n)$: Οριακή πιθ. n πελατών σε συνεχή χρ

: μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου με n πελάτες

• $E[Q] = \lim_{t \to \infty} E[Q(t)]$: Οριακός μέσος αριθμός πελ. στο σύστημα

: μακροπρόθεσμος μέσος αριθμός πελ. στο σύστημα

$$E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \lim_{t \to \infty} \frac{E[\int_0^t Q(u)du]}{t}$$

Γενικά, Q : Οριακή τ.μ. με $P(Q=n) = P_n$, $n \geq 0$

• $r_n = \lim_{i \to \infty} P(Q_i^- = n)$: οριακή πιθ. n πελατών σε στιγμή άφιξη

: μακροπρόθεσμο ποσοστό των αφίξεων που βρίσκουν n πελά

• $d_n = \lim_{i \to \infty} P(Q_i^+ = n)$: οριακή πιθ. n πελατών σε στιγμή αναχωρ

: μακροπρόθεσμο ποσοστό αναχωρ. που αφήνουν n πελάτες

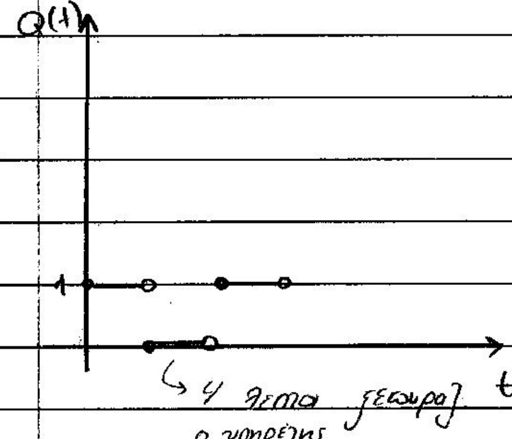
• $F_S(x) = \lim_{i \to \infty} P(S_i \leq x)$: οριακή κατανομή χρόνου παραμ. πελ
στο σύστημα

⋮

(ουσιαστικά για κάθε τ.μ. που ορίσαμε πριν μπορώ να έχω και μέτρ
απόδοσης)

μυδ → (p_n), (r_n) και d_n

παρ I: D / D / 1



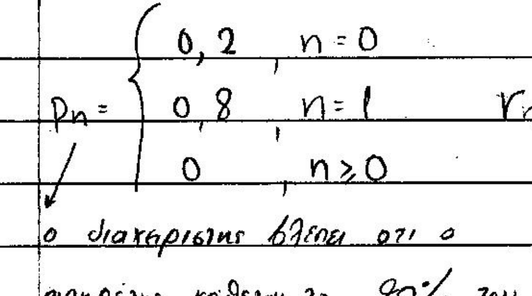
a = Μέσος ενδ. χρ. αφιξ. = 5 min

b : Μέσος χρ. εξυπ. = 1 min

$$p_n = \begin{cases} 0{,}8 & n=0 \\ 0{,}2 & n=1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases} \qquad r_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \geq 1 \end{cases} \qquad d_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \geq 1 \end{cases}$$

παρ II: D / D / 1   a = 5 min

b = 4 min



$$p_n = \begin{cases} 0{,}2 & n=0 \\ 0{,}8 & n=1 \\ 0 & n \geq 0 \end{cases} \qquad r_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \geq 0 \end{cases} \qquad d_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \geq 0 \end{cases}$$

ο διαχειριστής βλέπει ότι ο υπηρέτης κάθεται το 20% του χρόνου ενώ πριν καθόταν το 80% του χρόνου.

πιθ. φεύγοντας να δεις n-πελάτες

μωβ ~ Τα 4 βασικά αποτελέσματα

1) Ρυθμός συνωστισμού - Ευστάθεια

GI / GI / c

$\rho = \lambda b$: ρυθμος συνωστισμου (ποση δουλειά μπαίνει στο συστ / χρ. μονάδα)

μέσο εισερχόμενο έργο ανά χρονική μονάδα

Σύστημα ευσταθές $\Leftrightarrow$ $\rho < c$	(όχι για D/D/1) $\rightarrow \rho \leq c$

2) Θ. Little

$$\boxed{E[Q] = \lambda \cdot E[S]}$$

Μέσος αριθμος πελατών = Ρυθμος αφίξεων × Μέσο χρονο παραμονής

3) Ιδιότητα Μεμονωμένων Αφίξεων

$$\boxed{\text{Μεμονωμένες αφίξεις} \Rightarrow (r_n) = (d_n)}$$

4) Ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See time Averages)

$$\boxed{\text{Poisson διαδ. αφίξεων} \Rightarrow (p_n) = (r_n)}$$