11/5/2016

Ουρές Αναμονής
Μελέτη Συγκεκριμένων Συστημάτων

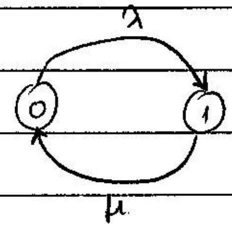
Βασικά Αποτελέσματα

1) Ευστάθεια σε GI/G/c όχι υπερφ $\Leftrightarrow \overset{\lambda b}{\overset{\shortparallel}{\rho}} < c$
2) Ν. Little: $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$
3) Ιδιότητα Μεμον. Μεταβ.: Μεμον μεταβάσεις $\Rightarrow Q^- \overset{d}{=} Q^+ \; ((r_n) = (d_n))$
4) Ιδιοτ. PASTA: Poisson αφίξεις $\Rightarrow Q^- \overset{d}{=} Q \; ((r_n) = (p_n))$

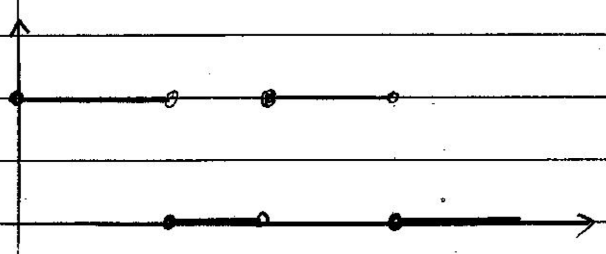
Η M/M/1/1 ουρά

M – Poisson διαδ. αφίξεων ρυθμού λ
M – $Exp(\mu)$ χρ. εξυπ
1 – 1 υπηρέτης
1 – Χωρητικότητα 1
– FCFS

$Q = \#$ πελ. στο σύστημα $\in \{0, 1\}$



$E[Q] = ;$ $\quad (p_n) = ;$ $\quad E[I] = ;$
$E[S] = ;$ $\quad (r_n) = ;$ $\quad E[Y] = ;$
$(d_n) = ;$ $\quad E[Z] = ;$



Λύση

Ευρεση $E[Q], E[S]$

Θ. Little: $E[Q] = \lambda E[S]$

Μέσος χρ. παραμονής με δεσμ. στο τι βλέπει ο αφικν. πελάτης:

$$E[S] = \sum_{n=0} P[Q^- = n]\, E[S \mid Q^- = n]$$

$$= r_0 \underbrace{E[S \mid Q^- = 0]}_{1/\mu} + r_1 \underbrace{E[S \mid Q^- = 1]}_{0}$$

$$E[Q] = \lambda E[S] \Rightarrow 0 \cdot P[Q=0] + 1 \cdot P[Q=1] = \lambda r_0 \frac{1}{\mu}$$

$$\xRightarrow{\rho = \lambda/\mu} p_1 = \rho \cdot r_0$$

$$\left.\begin{array}{l} \xRightarrow{PASTA} p_1 = \rho \cdot p_0 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow p_0 = \frac{1}{1+\rho}$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1+\rho}$$

Ευρεση $(r_n), (p_n), (d_n)$

Ιδιότητα PASTA: $(r_n) = (p_n)$

Ιδιότητα Μεμ. αφιξ: $(d_n) = (r_n)$

Συνεχεια ευρεσης $E[Q], E[S]$

$$E[Q] = P[Q=1] = p_1 = \frac{\rho}{1+\rho}$$

$$E[S] = r_0 \frac{1}{\mu} = p_0 \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1+\rho)}$$

Ευρεση $E[I], E[Y], E[Z]$

$$E[I] = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[Y] = \frac{1}{\mu}$$

$$E[Z] = E[I] + E[Y] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$$

$$F_S(x) = \frac{1}{1+\rho}\left(1 - e^{-\mu x}\right) + \frac{\rho}{1+\rho}, \quad x \geq 0$$

Η M/M/1 ουρά

M - Poisson αφίξεις με ρυθμό λ	$E[Q] = ;$	$E[I] = ;$
M - $Exp(\mu)$ χρ. εξυπηρέτησης	$E[S] = ;$	$E[Y] = ;$
1 - 1 υπηρέτης	$(p_n) = ;$	$E[Z] = ;$
- Χωρητικότητα ∞	$(r_n) = ;$	$F_S(x) = ;$
- FCFS	$(d_n) = ;$	

Λύση

Εύρεση $E[Q], E[S]$

• Θ. Little : $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$ (1)

Υπολογισμός του $E[S]$ με δεσμ. στο Q^- : (όπως πριν)

$$\bullet\, E[S] = \sum_{n=0}^{\infty} P[Q^- = n] \cdot E[S \mid Q^- = n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} r_n \left(\frac{n+1}{\mu} \right)$$

περιμένω $\frac{1}{\mu}$ γι' αυτό που εξυπηρετείται, $\frac{1}{\mu}$ για εμένα και $\frac{1}{\mu}$ για τον καθένα $(\nu-1)$ που βρίσκεται μπροστά μου

Άρα $(n+1) \cdot \frac{1}{\mu}$

$$\overset{PASTA}{=} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{n+1}{\mu}$$

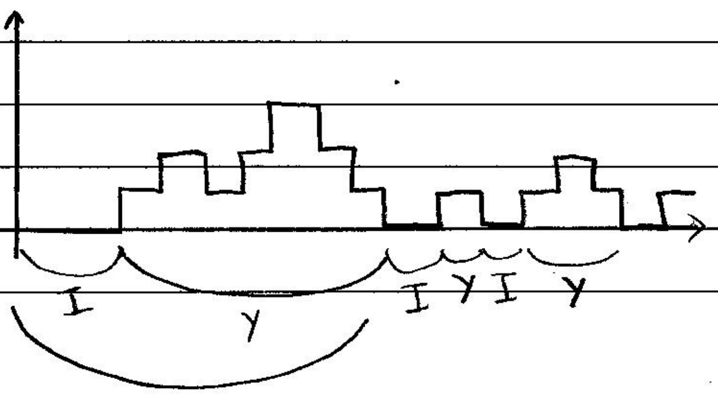
$$= \frac{1}{\mu} E[Q] + \frac{1}{\mu} \quad (2)$$

Λύνω το σύστημα (1), (2):

$$E[Q] = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} E[Q] + \frac{\lambda}{\mu} \overset{\rho = \lambda/\mu}{\Longrightarrow} E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$E[S] = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

Εύρεση $E[I], E[Y], E[S]$



$\bullet E[I] = E[\text{Υπολειπ. χρονος αφιξης}] = \frac{1}{\lambda}$

$\bullet p_0 =$ μακροπροθεσμο ποσοστό του χρόνου που το σύστημα είναι κενό. $\overset{\text{ΣΑΘΑ}}{=} \dfrac{E[\text{χρονος κενού συστήματος στο } Z]}{E[Z]} = \dfrac{E[I]}{E[Z]}$

$\underset{p_0=1-\rho}{\Rightarrow} 1-\rho = \dfrac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow 1-\rho = \dfrac{1/\lambda}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \dfrac{1}{\lambda(1-\rho)}$

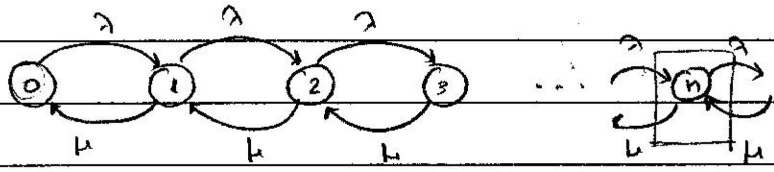
↳ το είχαμε βρει στο προηγ. μάθημα (πιθ. κενού συστημ. σε $GI/G/1$)

$\bullet E[Y] = E[Z] - E[I] = \dfrac{1}{\lambda(1-\rho)} - \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{\cancel{1}-\cancel{1}+\rho}{\lambda(1-\rho)} = \dfrac{1}{\mu(1-\rho)}$

Ευρεση $(p_n), (r_n), (d_n)$ • Υπολογισμός (p_n)

1ος τρόπος (καλυτερος τροπος)

Ο χώρος καταστάσεων της Q είναι ο $\{0, 1, 2, \dots\}$



Ιδεα: Υπάρχει ένας δείκτης που μετακινείται στις διάφορες καταστάσεις και βλέπουμε κάθε κατάσταση ως σύστημα εξυπηρέτησης και εφαρμόζουμε το Ν. Little

Εστω το σύστημα που αντιστοιχεί στην κατάσταση n:

$E[Q] = \lambda E[S]$

$p_n = (\lambda \cdot p_{n-1} + \mu p_{n+1}) \dfrac{1}{\lambda+\mu}, \quad n \geq 1$

ο πελάτης είναι ο δείκτης

μπορεί να είναι η 1 ή κανένας (αφού μιλάμε για το δείκτη)

$p_0 = \mu \cdot p_1 \cdot \dfrac{1}{\lambda}$

$\lambda p_0 = \mu p_1$

$(\lambda + \mu) p_n = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} \quad , n \geq 1$

$\lambda p_0 = \mu p_1 \longrightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$ $\quad \frac{\lambda}{\mu} \to \rho$

$\lambda p_1 + \cancel{\mu p_1} = \cancel{\lambda p_0} + \mu p_2 \longrightarrow p_2 = \frac{\lambda}{\mu} p_1$

$\lambda p_2 + \cancel{\mu p_2} = \cancel{\lambda p_1} + \mu p_3 \longrightarrow p_3 = \frac{\lambda}{\mu} p_2$

$\lambda p_3 + \cancel{\mu p_3} = \cancel{\lambda p_2} + \mu p_4 \longrightarrow p_4 = \frac{\lambda}{\mu} p_3$

Άρα, $p_n = \rho^n \cdot p_0 \quad , n \geq 0$

Ευστάθεια $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Leftrightarrow p_0 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n}_{< \infty \text{ αν } \rho < 1} = 1 \Leftrightarrow p_0 \cdot \frac{1}{1-\rho} = 1 \Leftrightarrow p_0 = 1 - \rho$

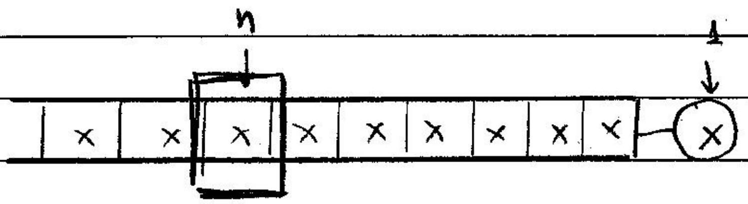
Άρα, $\rho \geq 1 \rightarrow$ Αστάθεια

$\rho < 1 \Rightarrow p_n = (1-\rho)\rho^n , \; n \geq 0 \quad Geom(\rho)$

PASTA - Ιδιοτ. μετ. αφ. $\Rightarrow \overbrace{(d_n) = (r_n)}^{\text{μεταν. αφιξ.}} = \underbrace{(r_n) = (p_n)}_{PASTA}$

2ος τρόπος

Ιδέα: Βλέπουμε το σύστημα ως φυσικό αντικείμενο και επικεντρώνόμαστε στη n-οστή θέση του



Εφαρμόζω Ν. Little στη n-οστή θέση

$E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

$\sum_{k=n}^{\infty} p_k = \lambda \underline{\sum_{k=n-1}^{\infty} r_k} \; 1/\mu$

Αφαιρώντας δυο διαδοχικές τέτοιες σχέσεις:

$$n \to \sum_{k=n}^{\infty} p_k = \lambda \sum_{k=n-1}^{\infty} r_k \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$n+1 \to \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k = \lambda \sum_{k=n}^{\infty} r_k \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$\Rightarrow p_n = \frac{\lambda}{\mu} \cdot r_{n-1} \xRightarrow{PASTA} p_n = \frac{\lambda}{\mu} p_{n-1} \Rightarrow p_n = \rho \cdot p_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

(συνεχίζουμε όπως πριν) $\rho \geq 1$: αστάθεια

$\rho < 1$: $p_n = (1-\rho)\rho^n, \quad n \geq 0$

• Κατανομή Χρόνου Παραμονής $F_S(x)$

$$\tilde{F}_S(s) = E[e^{-sS}] = \sum_{n=0}^{\infty} P[Q^- = n] \cdot E[e^{-sS} \mid Q^- = n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underset{\substack{\parallel \\ p_n \\ \parallel \\ (1-\rho)\rho^n}}{r_n} \cdot \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n+1} = \frac{(1-\rho)\mu}{\mu+s} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu\rho}{\mu+s}\right)^n = \frac{(1-\rho)\mu}{\mu+s} \cdot \frac{1}{1-\frac{\mu\rho}{\mu+s}}$$

$$= \frac{(1-\rho)\mu}{\mu+s-\mu\rho} = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho)+s} \Rightarrow S \sim Exp(\mu(1-\rho))$$

Άρα $F_S(x) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)x}, \quad x \geq 0$

Η M|M|∞ ουρά (σπίτι)

Θ. Little: $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

Υπολογισμός του $E[S]$ με δέσμευση στο Q^-

$$E[S] = \sum_{n=0}^{\infty} P[Q^- = n] \cdot E[S \mid Q^- = n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} r_n \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{1}{\mu}$$

$E[Q] = \lambda$