25/5/2016

Ασκήσεις

Φυλ 3/ Ασκ 4

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ $S_1, S_2, \dots,$ χρονοι γεγονότων.

$E[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i] = ;$

$$E[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i] = \sum_{n=0}^{\infty} E[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i \mid N(t)=n] P[N(t)=n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E[S_i \mid N(t)=n]}_{\shortparallel} \underbrace{P[N(t)=n]}_{\shortparallel}$$

$E[U_{i:n}]$ $\quad e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

$\shortparallel$ i-οστή διατ από

$\frac{i \cdot t}{n+1}$ $(U_1, \dots, U_n)$ τδ $\sim U([0,t])$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(\cancel{n+1})}{2(\cancel{n+1})} t \; e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= \frac{t}{2} E[N(t)]$$

$$= \frac{\lambda t^2}{2}$$

Φυλ 3/ Ασκ 5: Βλ. παραδ. μη-ομογ. διαδ. Poisson

Φυλ 3/ Ασκ 1:

$\{N(t)\}$ σ.δ Poisson ρυθμού λ. $P(N(1)=1, N(2)=2, \dots, N(n)=n)$

$P(N(1)=1, N(2)=2, \quad N(n)=n) =$

$= P(N(1)=1, N(2)-N(1)=1, N(3)-N(2)=1, \dots, N(n)-N(n-1)=1)$

$\overset{\text{ανεξ}}{=} P(N(1)=1) P(N(2)-N(1)) \cdot P(N(3)-N(2)) \cdots P(N(n)-N(n-1)=1)$

$\underset{\text{προς}}{\overset{\text{προς}}{\underline{\text{ομογ}}}}$ $(P(N(1)=1))^n = (e^{-\lambda}\lambda)^n = \lambda^n e^{-n\lambda}$

Φυλ 3/Ασκ 2

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ. $E[N(1)N(2)N(3)] = ;$

$$E[N(1)N(2)N(3)] = E[N(1)(N(1)+(N(2)-N(1)))(N(1)+(N(2)-N(1))+(N(3)-N(2))]$$
$$\overset{\text{ανεξ}}{\underset{\text{προς}}{=}} E[(N(1))^3] + E[N(1)^2]\,E[N(2)-N(1)] + E[N(1) \ldots$$

Φυλ 4/Ασκ 1

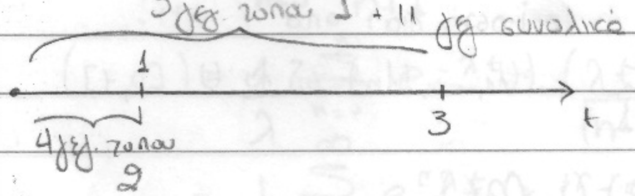
$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ

γεγονός $\rightarrow$ τυπου 1 με πιθ $1/3$

$\searrow$ τυπου 2 με πιθ $2/3$

$N_i(t) = \#$ γεγ. τυπου i στο $(0,t]$

$P(N_1(3)=5,\ N(3)=11 \mid N_2(1)=4) = ;$



$$P(N_1(3)=5,\ N(3)=11 \mid N_2(1)=4) = P(N_1(3)=5,\ N_2(3)=6 \mid N_2(1)=4)$$
$$= P(N_1(3)=5 \mid \cancel{N_2(1)=4})\ P(N_2(3)=6 \mid \cancel{N_1(3)=5},\ N_2(1)=4)$$

πολ/κο νομο

ανεξ $\{N_1(t)\} \perp \{N_2(t)\}$

$$= P(N_1(3)=5)\ P(N_2(3)-N_2(1)=2 \mid \cancel{N_2(1)=4})$$
$$\overset{\text{ανεξ. ομοιογ}}{\underset{\text{προσ}}{=}} P(N_1(3)=5)\,P(N_2(2)=2)$$
$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^5}{5!}\, e^{-4\lambda/3}\frac{(4\lambda/3)^2}{2!}$$

Φυλ 4/Ασκ 2

ανεξ $\{N_1(t)\}$ σ.δ. Poisson με ρυθμό 3.

$\{N_2(t)\}$ σ.δ. Poisson με ρυθμό 2.

$\{N(t)\}$ υπέρθεση

$E[N_1(t) \mid N(t)=10]$

$$E[N_1(t) \mid N(t)=10] = \sum_{n=0}^{10} n\, P(N_1(t)=n \mid N(t)=10)$$

$$= \sum_{n=0}^{10} n \frac{P(N_1(t)=n, N(t)=10)}{P(N(t)=10)}$$

$$= \sum_{n=0}^{10} n \frac{P(N_1(t)=n, N_2(t)=10-n)}{P(N(t)=10)}$$

$$\overset{\text{ανεξ διαδ } \{N_1(t)\},\{N_2(t)\}}{=} \sum_{n=0}^{10} n \frac{P(N_1(t)=n) \cdot P(N_2(t)=10-n)}{P(N(t)=10)}$$

$$= \sum_{n=0}^{10} n \frac{e^{-3t}\frac{(3t)^n}{n!} \cdot e^{-2t}\frac{(2t)^{10-n}}{(10-n)!}}{e^{-5t}\frac{(5t)^{10}}{10!}}$$

$$= \sum_{n=0}^{10} n \underbrace{\binom{10}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^{10-n}}_{\text{σ.π. της } Bin(10, \frac{3}{5})}$$

$$= 10 \cdot \frac{3}{5} = 6$$

2ος τρόπος

$$E[N_1(t) \mid N(t)=10] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} I_i \mid N(t)=10\right] \text{ όπου :}$$

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{αν το } i\text{-οστό γεγ. της } \{N(t)\} \text{ είναι τύπου } 1 \\ 0, & \text{ " } \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2 \end{cases}$$

$$= \sum_{i=1}^{10} E[I_i \mid N(t)=10] = 10\, E[I_1] = 10 \cdot \frac{3}{3+2} = 6$$

Φυλ 4 / Ασκ 3

$\{N(t)\}$ σ.δ Poisson ρυθμού λ.

$$\text{γεγονός} \begin{cases} \to \text{τύπου } 1 & \text{με πιθ } p \\ \searrow \text{τύπου } 2 & \text{με πιθ } 1-p \end{cases} \Big\} \text{ ανεξ}$$

$N_i(t) = \#$ γεγ. τύπου i στο $(0,t]$

T_i = Χρόνος 1ου γεγ στην $N_i(t)$

$F_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2) = ;$

$$F_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = P(N_1(t_1) \geq 1, N_2(t_2) \geq 1)$$

$= P(N_1(t_1) \geq 1) \cdot P(N_2(t_2) \geq 1)$

$= (1 - P(N_1(t_1) = 0))(1 - P(N_2(t_2) = 0))$

$= (1 - e^{-\lambda p t_1})(1 - e^{-\lambda(1-p)t_2})$

Φυλ 4 | Ασκ 4

Σύστημα υποκείμενο σε k είδη ηλ. διαταραχών Poisson (λ_i)

διαδ. διαταρ. τύπου i ← Ανεξ.

ηλ. διαταρ τύπου i → βλάβη με πιθ p_i ← Ανεξ.

T: χρόνος μέχρι την βλάβη

S: Είδος ηλ. διαταρ. που προκάλεσε τη βλάβη.

$P(T > t, S = i) = ;$

$\{N_i(t)\}$ σ.δ. διαταρ τύπου i → Poisson με ρυθμό λ

$\{N_i'(t)\}$ σ.δ. διαταρ τύπου i θεωρ

που προκαλούν βλάβη $\xrightarrow{\text{διάσπ}}$ Poisson με ρυθμό $\lambda_i p_i$

$\{N'(t)\}$ σ.δ. διαταρ που προκ θεωρ

βλάβη $\xrightarrow{\text{υπερ}}$ Poisson με ρυθμό $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$

= υπέρθεση των $\{N_i'(t)\}$

$P(T > t, S = i) = P\left(\begin{matrix} \text{χρόνος 1ης άφιξ} \\ \text{και της } \{N'(t)\} \end{matrix} > t, \begin{matrix} \text{Τύπος που η άφιξη της} \\ \{N'(t)\} = i \end{matrix} \right)$

$= e^{-\sum_{j=1}^{k} \lambda_j p_j t} \cdot \dfrac{\lambda_i p_i}{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j p_j}$

Φυλ 4 | Ασκ 5

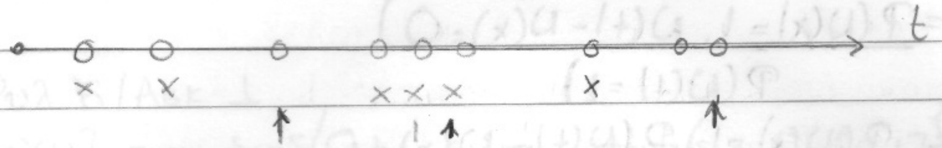
$\{N(t)\}$ σ.δ. $\overset{\text{Poisson}}{\text{με}}$ ρυθμό λ.

Αφιξ → καταγρ. με πιθ. 1/3 → $\{N_1(t)\}$ σ.δ. καταγεγρ αφιξ}

$\{N_2(t)\}$ σ.δ. που καταγράφει τα k-οστά αφιξ της $\{N(t)\}$ όπου k πολ/σιο το 3

α) $\{N_2(t)\}$ σ.δ. Poisson

β) $P(N_1(t) = 3 \mid N_2(t) = 1) = ;$



$\circ \to \{N(t)\}$

$\times \to \{N_1(t)\}$

$1 \to \{N_2(t)\}$

α) $N_2(t)$ δεν είναι στοχαστική διαδ. Poisson αφού οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των γεγ. δεν είναι exp είναι Erlang $(3,\lambda)$.

Σχόλιο: Είναι πάντως ανανεωτική διαδ.

β) $$P(N_1(t)=3 \mid N_2(t)=4) = P(N_1(t)=3 \mid N(t)=3 \text{ ή } 4 \text{ ή } 5)$$
$$= \frac{P(N_1(t)=3,\ N(t)=3 \text{ ή } 4 \text{ ή } 5)}{P(N(t)=3 \text{ ή } 4 \text{ ή } 5)}$$
$$= \frac{P(N_1(t)=3, N(t)=3) + P(N_1(t)=3, N(t)=4) + P(N_1(t)=3, N(t)=5)}{P(N(t)=3) + P(N(t)=4) + P(N(t)=5)}$$
$$= \frac{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^3}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^4}{4!}\binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1 + e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^5}{5!}\binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2}{e^{-\lambda t}\left(\frac{(\lambda t)^3}{3!} + \frac{(\lambda t)^4}{4!} + \frac{(\lambda t)^5}{5!}\right)}$$

Φυλλ 5/Ασκ 1.

$\{N(t)\}$ μη-ομογ. σδ Poisson με συν. ρυθμού $\lambda(t)$

$P(S_1 \leq x \mid N(t)=1) = ;\quad x \geq 0$

$$P(S_1 \leq x \mid N(t)=1) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x \geq t \end{cases}$$

Για $0<x<t$:
$$P(S_1 \leq x \mid N(t)=1) = P(N(x)\geq 1 \mid N(t)=1)$$
$$= P(N(x)=1 \mid N(t)=1)$$
$$= \frac{P(N(x)=1,\ N(t)=1)}{P(N(t)=1)}$$

$$= \frac{P(N(x)=1,\ N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)}$$

$$\overset{\text{ανεξ προσ}}{=} \frac{P(N(x)=1)\,P(N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)}$$

$N(t)-N(x) \sim$ Poisson $\left(\int_x^t \lambda(u)du\right)$

$$= \frac{\cancel{e^{-\Lambda(x)}}\,\frac{(\Lambda(x))^1}{1!}\,e^{-(\cancel{\Lambda(t)}-\cancel{\Lambda(x)})}\,\frac{(\Lambda(t)-\Lambda(x))^0}{0!}}{\cancel{e^{-\Lambda(t)}}\cdot\frac{(\Lambda(t))^1}{1!}}$$

$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$

$$= \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(t)}$$

Τελικά, $P(S_1 \le x \mid N(t)=1) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(t)}, & 0<x<t \\ 1, & x \ge t \end{cases}$

Φυλ 5/Ασκ 2

$\{N(t)\}$ μη-ομογ. σδ Poisson με συν. ρυθμού $\lambda(t)=\lambda t$.

S_1 = Χρονος 1ου γεγ

$E[N(t)] = ;$, $E[S_1] = ;$

$N(t) \sim$ Poisson $(\Lambda(t))$ $\qquad \Lambda(t) = \int_0^t \underbrace{\lambda(u)}_{\lambda u}du = \frac{\lambda t^2}{2}$

$$\Rightarrow E[N(t)] = \Lambda(t) = \frac{\lambda t^2}{2}$$

$$E[S_1] = \int_0^\infty (1-F_{S_1}(t))dt = \int_0^\infty P(S_1>t)dt = \int_0^\infty P(N(t)=0)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t^2/2}dt \overset{(*)}{=}$$

$(*)$ $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$