Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα I
Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

Δεσμευμένη κατανομή χρόνων των γεγονότων δεδομένου του αριθμού τους (Θεώρημα Campbell)

(1) Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και $S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι των γεγονότων της. Να αποδειχτεί ότι ο χρόνος πραγματοποίησης του τελευταίου γεγονότος πριν τη στιγμή t είναι

$$E[S_{N(t)}] = t - (1 - e^{-\lambda t})/\lambda.$$

(2) Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και S_1 ο χρόνος του πρώτου γεγονότος της. Να υπολογιστεί η δεσμευμένη μέση τιμή $E[S_1|N(t) \geq 1]$.

(3) Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και $S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι των γεγονότων της. Να υπολογιστεί ως συνάρτηση του λ και του t, η μέση τιμή

$$E[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i].$$

(4) Θεωρούμε ότι πελάτες φθάνουν σε ένα σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Κάθε πελάτης μενει στο σύστημα για εκθετικό χρόνο με παράμετρο μ και κατόπιν αναχωρεί. Οι εκθετικοί χρόνοι παραμονής των πελατών θεωρούνται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Αποδείξτε ότι ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα τη στιγμή t είναι $\frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})$.