

# Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα I

## Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

### Υπέρθεση και διάσπαση διαδικασιών Poisson

- (1) Έστω  $\{N(t) : t \geq 0\}$  μια διαδικασία Poisson με ρυθμό  $\lambda$ . Κάθε γεγονός της  $\{N(t)\}$  καταγράφεται ως τύπου 1 με πιθανότητα  $1/3$  και ως τύπου 2 με πιθανότητα  $2/3$ , ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα γεγονότα. Έστω  $\{N_1(t)\}$  η απαριθμητρία διαδικασίας των γεγονότων τύπου 1 και  $\{N_2(t)\}$  η απαριθμητρία διαδικασίας των γεγονότων τύπου 2. Να υπολογιστεί η πιθανότητα

$$P(N_1(3) = 5, N(3) = 11 | N_2(1) = 4).$$

- (2) Έστω  $\{N(t) : t \geq 0\}$  μια διαδικασία Poisson με ρυθμό  $\lambda$ . Κάθε γεγονός της καταγράφεται ως τύπου 1 με πιθανότητα  $p$  ή ως τύπου 2 με πιθανότητα  $q$  ( $p, q > 0$  και  $p + q = 1$ ). Να υπολογιστεί η πιθανότητα  $\pi_1$  από τα πρώτα  $n + k$  γεγονότα της  $\{N(t)\}$  τα πρώτα  $n$  να είναι τύπου 1 και τα επόμενα  $k$  τύπου 2. Να υπολογιστεί η πιθανότητα  $\pi_2$  από τα πρώτα  $n + k$  γεγονότα της  $\{N(t)\}$  να υπάρχουν  $n$  τύπου 1 και  $k$  τύπου 2.

- (3) Έστω  $\{N_1(t) : t \geq 0\}$  και  $\{N_2(t) : t \geq 0\}$  δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς 3 και 2 αντίστοιχα και  $\{N(t) : t \geq 0\}$  η υπέρθεσή τους. Να υπολογιστεί η δεσμευμένη μέση τιμή

$$E[N_1(t) | N(t) = 10].$$

- (4) Έστω  $\{N(t) : t \geq 0\}$  μια διαδικασία Poisson με ρυθμό  $\lambda$ . Κάθε γεγονός της  $\{N(t)\}$  καταγράφεται ως τύπου 1 με πιθανότητα  $p$  και ως τύπου 2 με πιθανότητα  $1 - p$ , ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα γεγονότα. Έστω  $\{N_1(t)\}$  η απαριθμητρία διαδικασίας των γεγονότων τύπου 1 και  $\{N_2(t)\}$  η απαριθμητρία διαδικασίας των γεγονότων τύπου 2. Έστω, επίσης,  $T_1$  και  $T_2$  οι χρόνοι πρώτων γεγονότων στις  $\{N_1(t)\}$  και  $\{N_2(t)\}$  αντίστοιχα. Να υπολογιστεί η από κοινού συνάρτηση κατανομής των  $T_1, T_2$ , δηλαδή η συνάρτηση

$$F_{T_1, T_2}(t_1, t_2) = P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2).$$

- (5) Ένα σύστημα υπόκειται σε  $k$  διαφορετικά είδη ηλεκτρικών διαταραχών (shocks). Οι ηλεκτρικές διαταραχές των διαφόρων τύπων συμβαίνουν ανεξάρτητα και μάλιστα οι ηλεκτρικές διαταραχές τύπου  $i$  συμβαίνουν σύμφωνα με μια Poisson διαδικασία με ρυθμό  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Μια ηλεκτρική διαταραχή τύπου  $i$  προκαλεί βλάβη στο σύστημα με πιθανότητα  $p_i$ , ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο. Έστω  $T$  ο χρόνος ζωής του συστήματος (δηλαδή ο χρόνος μέχρι να πάθει βλάβη από κάποια ηλεκτρική διαταραχή) και  $S$  το είδος της ηλεκτρικής διαταραχής που προκάλεσε τη βλάβη. Να υπολογιστεί η πιθανότητα

$$P(T > t, S = i).$$

- (6) Έστω  $\{N(t) : t \geq 0\}$  μια διαδικασία Poisson με ρυθμό  $\lambda$ . Κάθε γεγονός της  $\{N(t)\}$  καταγράφεται με πιθανότητα  $1/3$  ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα γεγονότα στη διαδικασία  $\{N_1(t)\}$ . Από την άλλη μεριά θεωρούμε τη διαδικασία  $\{N_2(t)\}$  που καταγράφει μόνο τα  $k$ -οστά γεγονότα της  $\{N(t)\}$ , όπου το  $k$  είναι πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή το 3ο, το 6ο,

το 9ο κλπ. γεγονός. Επομένως και η  $\{N_2(t)\}$  καταγράφει με πιθανότητα  $1/3$  αλλά όχι ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα γεγονότα.

(α') Είναι η  $\{N_2(t)\}$  διαδικασία Poisson;

(β') Να υπολογιστεί η πιθανότητα  $P(N_1(t) = 3 | N_2(t) = 1)$ .