ΣΜ.Ε.Ε. Μάθημα 1° 15/2/17.

## Επανάληψη από πιθανότητες.

### Δεσμευμένη μέση τιμή

- $f_{X,Y}(x,y)$ ← η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας ή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X, Y

δηλαδή
$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} P(X=x,Y=y) & \text{αν } X,Y \text{ διακριτές τ.μ.} \\ \frac{\partial}{\partial x\partial y}F_{X,Y}(x,y) & \text{αν } X,Y \text{ συνεχείς} \end{cases}$$

η περιθώρια κατανομή της X είναι:
$$f_X(x)=\begin{cases} \sum_y f_{X,Y}(x,y) & X,Y \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy & X,Y \text{ συνεχείς} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$ δεσμευμένη σ.π ή σ.π.π της Y δεδομένου ότι $X=x$.

Μας ενδιαφέρει η δεσμευμένη μέση τιμή:
$$m_{Y|X}(x)=E(Y|X=x)=\begin{cases} \sum_y y f_{Y|X}(y|x) & \text{για } Y \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)\,dy & \text{για } Y \text{ συνεχή} \end{cases}$$

είναι η μέση τιμή της Y όταν γνωρίζουμε ότι το μέγεθος X έχει πάρει συγκεκριμένη τιμή
→ αριθμός, καλύτερη πρόβλεψη της Y αν γνωρίζω ότι $X=x$.

Η $m_{Y|X}(X)$ είναι τ.μ., την εκφράζουμε ως την καλύτερη συνάρτηση της X που προσεγγίζει την Y.

# Θεώρημα διπλής μέσης τιμής

(Πώς να σκεφτόμαστε σε στάδια)
Αν μας ενδιαφέρει να βρούμε την $E(Y)$ μπορούμε να το κάνουμε βρίσκοντας την $E(Y|X)$ και έπειτα να πάρουμε $E[E(Y|X)]$ για να βρούμε αυτό που ψάχναμε αρχικά.

$$E\left[E(Y|X)\right] = \begin{cases} \sum_x m_{Y|X}(x)\cdot f_X(x) & \text{αν } X \text{ διακριτή.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} m_{Y|X}(x)\cdot f_X(x)\,dx & \text{αν } X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

(το αντίστοιχο του Θεωρήματος ολ. πιθανότητας)

## Εφαρμογές

1) Ρίψη ζαριού (τίμιο ζάρι) και ρίψη νομίσματος όσες φορές έδειξε το ζάρι. Η πιθ. να φέρω Κορώνα είναι $p$.

Έστω $Y = \#K$ που εμφανίζονται.
ψάχνω την $E(Y)$

α τρόπος: $E(Y) = \sum_{y=0}^{6} y f_Y(y)$ δύσκολο να το βρω έτσι.

$$f_Y(y) = \sum_{x=y}^{6} \frac{1}{6}\binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y}$$

β τρόπος: Θ.Δ.Μ.Τ.
Έστω $X$ = ένδειξη του ζαριού.
και $E(Y) = E[\underbrace{E(Y|X)}_{τ.μ.}] = \sum_{x=1}^{6} E(Y|X=x)\cdot \overbrace{f_X(x)}^{P(X=x)}$
όμως $P(X=x) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, \dots, 6$.
οπότε $E(Y|X=x) \overset{(*)}{=} x\cdot p$.
έχω ότι $(Y|X=x) \sim Bin(x,p)$ (*)
$\Longrightarrow \sum_{x=1}^{6} x\cdot p \cdot \frac{1}{6} \overset{α.π.}{=} \frac{6\cdot 7p}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{7p}{2}$

## 2) Μέση τιμή γεωμετρικής κατανομής

Νόμισμα ρίχνεται συνέχεια μέχρι την πρώτη επιτυχία (Κ)
Έστω $Y = \#$ ρίψεων ως την πρώτη κορώνα.
Η πιθ. να φέρω κορώνα σε μια ρίψη είναι p. ψάχνω $E(Y)$

α τρόπος: (από πιθ. I).

$$f_Y(y) = P(Y=y) = (1-p)^{y-1}p \qquad y = 1, 2, \dots$$

$$E(Y) = \sum_{y=1}^{\infty} y(1-p)^{y-1}p \qquad \left[ \text{έχω } \sum_{y=0}^{\infty} t^y = \frac{1}{1-t} \overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{y=1}^{\infty} y t^{y-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \right]$$

$$\overset{t=1-p}{\Longrightarrow} \sum_{y=1}^{\infty} y(1-p)^{y-1} = \frac{1}{p^2} \text{ οπότε } E(Y) = \frac{1}{p}.$$

β' τρόπος: Θ.Δ.Μ.Τ

$$\text{Έστω } X = \begin{cases} 1 & \text{αν η } 1^{η} \text{ ρίψη είναι Κ} \\ 0 & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{" Γ} \end{cases}$$

Θα βρω την $E(Y)$ δεσμεύοντας ως προς X.
Έχω:

$$E(Y) = \underbrace{P(X=0)}_{1-p} \cdot \underbrace{E(Y|X=0)}_{\substack{\text{χάνω την } 1^{η} \\ \text{ρίψη άρα είναι} \\ 1+E(Y)}} + \underbrace{P(X=1)}_{p} \cdot \underbrace{E(Y|X=1)}_{1}.$$

$$\Longrightarrow E(Y) = (1-p)(1+E(Y)) + p \cdot 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \cancel{E(Y)} = 1 + \cancel{E(Y)} - \cancel{p} - pE(Y) + \cancel{p} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow E(Y) = \frac{1}{p} \;//$$

Τρόπος Σκέψης: Βλέπω πώς λειτουργεί το πείραμα τύχης εξετάζοντας την $1^{η}$ εκτέλεση του πειράματος.

## 3) Το πρόβλημα των συναρτήσεων.

Έχουμε $n$-ανθρώπους με τα καπέλα τους, παίρνει ο καθένας ένα στην τύχη.

i) Πόσοι αναμένεται να έχουν πάρει το καπέλο τους;
Θέτω $M_n = \#$ αυτών που πήραν το καπέλο τους, $E(M_n) = ;$

ii) Αν όσοι βρίσκουν το καπέλο τους αποχωρούν, έστω
$R_n = \#$ γύρων ώστε όλοι να φύγουν με το καπέλο τους.
και ψάχνω $E(R_n)$

Λύση

Για $n=2$:

| 1 | 2 | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | $\to M_2 = 2$ |
| 2 | 1 | $\to M_2 = 0$ |

$\Rightarrow E(M_3) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 1.$

Για $n=3$:

| 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | $\to M_3 = 3$ |
| 1 | 3 | 2 | $\to M_3 = 1$ |
| 2 | 1 | 3 | $\to M_3 = 1$ |
| 2 | 3 | 1 | $\to M_3 = 0$ |
| 3 | 1 | 2 | $\to M_3 = 0$ |
| 3 | 2 | 1 | $\to M_3 = 1$ |

$E(M_3) = \frac{1}{6}\cdot 3 + 1\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{6}$
$= 1.$

Εικάζω ότι όσοι και να παίζουν κατά μέσο όρο ένας θα παίρνει το καπέλο του σε κάθε γύρο, ενώ στο 2° ερώτημα θα χρειαστώ $n$-γύρους καθώς ένας θα παίρνει κάθε φορά το καπέλο του. $(E(M_n) = 1,\ E(R_n) = n)$

Έχω $M_n = \sum_{i=1}^{n} I_i$ όπου $I_i = \begin{cases} 1 & \text{αν ο } i \text{ βρήκε το καπέλο του} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$$\Rightarrow E(M_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(I_i)}_{P(I_i=1)=\frac{1}{n}} = n\cdot\frac{1}{n} = 1.$$

Η 2η εικασία είναι δύσκολο να αποδειχθεί με αυτόν τον τρόπο, καθώς έχουμε:

$E(R_n)=\sum_x xP(R_n=x)$ → δεν γίνεται να βρω όλη τη συνάρτηση πραγματοποίησης.

Χρησιμοποιώ Θ.Δ.Μ.Τ.
δεσμεύω στην τ.μ. $X=\#$ ατόμων που βρήκαν το καπέλο τους στον 1ο γύρο.

Έχω λοιπόν $E(R_n)=E\left[E(R_n|X)\right]=$

$$=\sum_{x=0}^{n}P(X=x)\,\underbrace{E(R_n|X)}_{1+E(R_{n-x})}=1+\sum_{x=0}^{n}P(X=x)\,E(R_{n-x})$$

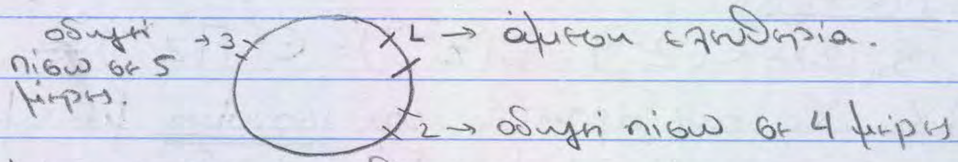
* Θ.δ.ο ισχύει $E(R_n)=n$ με επαγωγή στο $n$.
Για $n=0,1$ ισχύει.
Έστω ότι η υπόθεση ισχύει για $n-1$.

$$E(R_n)=1+P(X=0)E(R_n)+\sum_{x=1}^{n}P(X=x)(n-x)$$

$$\Rightarrow E(R_n)=\cancel{1}+P(X=0)E(R_n)+n\left(1-P(X=0)\right)-\cancel{E(X)}$$

$$\Rightarrow \left(1-P(X=0)\right)E(R_n)=n\left(1-P(X=0)\right)\Rightarrow E(R_n)=n.$$

4) Prison Break.




Έχω συνεχή επιλογή πόρτας ως την ελευθερία.
$Y=\#$ ημερών ως την ελευθερία, ψάχνω $E(Y)$

ΔΕΝ ΠΡΟΣΠΑΘΩ ΝΑ ΒΡΩ Σ.Π.

Έστω $X=$ αρχική επιλογή πόρτας, τότε με χρήση Θ.Δ.Μ.Τ

$$E(Y)=E\left[E(Y|X)\right]=P(X=1)\cdot E(Y|X=1)+P(X=2)\cdot E(Y|X=2)+P(X=3)E(Y|X=3)$$

Έχω $P(X=i)=\frac{1}{3}$ $i=1,2,3$

Άρα $E(Y)=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\left(4+E(Y)\right)+\frac{1}{3}\left(5+E(Y)\right)\Rightarrow$

$$\Rightarrow E(Y)=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}E(Y)+\frac{5}{3}+\frac{1}{3}E(Y)\Rightarrow\frac{1}{3}E(Y)=3\Rightarrow E(Y)=9$$

ΣΜΕΕ Μάθημα 2ο 17/2/17.

## Μετασχηματισμός Laplace-Stieljes

Ορισμός

$X \geq 0$ διακριτή με τιμές στο $\{0,1,2,\dots\}$

Η πιθανογεννήτρια της $X$ είναι:

$$P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) z^n = E(z^X)$$

Ιδιότητες

i) Η $P_X(z)$ συγκλίνει στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

ii) Η $P_X(z)$ προσδιορίζει μονοσήμαντα την σ.π. $P(X=n)$

$$P_X(z) = P_Y(z) \iff X, Y \text{ ισόνομες.}$$

$$P(X=n) = \frac{P_X^{(n)}(0)}{n!} \quad n=0,1,2,\dots$$

iii) $P_X(1) = 1$

iv) $E[X(X-1)\dots(X-n+1)] = P_X^{(n)}(1)$ (καθοδική ροπή $n$-τάξης).

γενικά ισχύει $P_X'(z) = E[X z^{X-1}]$

v) $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες (όχι απαραίτητα ισόνομες) τ.μ. με τιμές στο $\{0,1,\dots\}$ με $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ τότε $P_{S_n}(z) = P_{X_1}(z) P_{X_2}(z) \dots P_{X_n}(z)$

Απόδειξη

$$P_{S_n}(z) = E(z^{S_n}) = E(z^{\Sigma X_i}) = E\left(\prod z^{X_i}\right) \underset{X_1 \dots X_n}{\overset{\text{ανεξ.}}{=}} \prod_{i=1}^{n} E(z^{X_i}) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(z)$$

vi) $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες με τιμές στο $\{0,1,2,\dots\}$ και έστω $N$ τ.μ. με τιμές στο $\{0,1,\dots\}$ ανεξάρτητη των $X_i$

Ορίζουμε $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (τυχαίο άθροισμα τ.μ.) και έχουμε:

$$P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z))$$

Απόδειξη

$$P_{S_N}(z) = E(z^{S_N}) = E\left[z^{\sum^N X_i}\right] \underset{\text{δεσμεύω } N}{\overset{\text{Θ.Δ.Μ.Τ}}{=}} E\left[E\left[z^{\sum^N X_i} \mid N\right]\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} E\left[z^{\sum^N X_i} \mid N=n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} E\left[z^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] \cdot P(N=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (P_X(z))^n P(N=n) = P_N(P_X(z))$$

## Βασικές Σειρές

Γεωμετρική σειρά: $\sum_{k=0}^{+\infty} t^k = \frac{1}{1-t}$, $|t| < 1$

Διωνυμικό Θεώρημα: $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} t^k = (1+t)^n$ (ή $n$)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} t^k = (1-t)^{-n} \quad |t| < 1$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$$

## Πιθανογεννήτριες κλασσικών κατανομών

i) αν $X \sim Bernoulli(p)$

$$P(X=n) = \begin{cases} p & n=1 \\ 1-p & n=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_X(z) = pz^1 + (1-p)z^0$$

ii) αν $X \sim Bin(n,p)$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad 0 \le k \le n$$

αφού η διωνυμική είναι άθροισμα κατανομών Bernoulli ισχύει η (v) ιδιότητα άρα

$$P_X(z) = (pz + 1 - p)^n$$

iii) αν $X \sim Geom(p)$

$$P(X=n) = (1-p)p^n \quad n \ge 0$$

$$P_X(z) = \sum (1-p)p^n z^n = \frac{1-p}{1-pz}$$

iii) αν $X \sim Poisson(\lambda)$

$$P(X=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad n=0,1,2,\dots$$

$$P_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!} = e^{-\lambda+\lambda z} = e^{-\lambda(1-z)}$$

<u>Παράδειγμα</u>

X τ.μ. , $X \geq 0$ με πιθανογεννήτρια $P_X(z) = \frac{c - 15z}{54 - 63z + 18z^2}$ και θέλουμε να βρούμε την $P(X=n)$.

Επειδή ισχύει $P_X(1) = 1 \Rightarrow \frac{c-15}{54-63+18} = 1 \Rightarrow c - 15 = 9$
$\Rightarrow c = 24$

άρα $P_X(z) = \frac{24-15z}{54-63z+18z^2} = \frac{24-15z}{18(2-z)(\frac{3}{2}-z)} = \frac{A}{2-z} + \frac{B}{\frac{3}{2}-z}$

Για να βρω το A, πολ/ζω με $2-z$ και έχω

$$\frac{24-15z}{18(\frac{3}{2}-z)} = A + \frac{B}{\frac{3}{2}-z}(z-2) \xRightarrow{z=2} A = \frac{-6}{18(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$$

Για να βρω το B ομοίως:

$$\frac{24-15z}{18(2-z)} = \frac{A(\frac{3}{2}-z)}{2-z} + B \xRightarrow{z=\frac{3}{2}} B = \frac{24-15\frac{3}{2}}{18(2-\frac{3}{2})} = \frac{1}{6}$$

Συνεπώς: $\frac{24-15z}{18(2-z)(\frac{3}{2}-z)} = \frac{2/3}{2-z} + \frac{1/6}{3/2 - z} = \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{\cancel{6}3} \frac{\cancel{2}}{3} \frac{1}{1-\frac{2z}{3}}$

$$= \frac{1}{3} \sum \left(\frac{z}{2}\right)^n + \frac{1}{9} \sum \left(\frac{2z}{3}\right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(X=n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

## Παράδειγμα

ανεξ. $\begin{cases} X_1 \sim Geom(p_1) \Rightarrow P(X_1=n) = (1-p_1)p_1^n & n=0,1,2,\dots \\ X_2 \sim Geom(p_2) \Rightarrow P(X_2=n) = (1-p_2)p_2^n \end{cases}$

Ψάχνω την συνάρτηση πιθανότητας $Z = X_1 + X_2$

– Έστω ότι $p_1 \neq p_2$

$P(Z=n)=;$

$$P_Z(z)=P_{X_1}(z) = \frac{1-p_1}{1-p_1 z}\cdot\frac{1-p_2}{1-p_2 z} = \frac{A}{1-p_1 z} + \frac{B}{1-p_2 z}$$

$$A = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{1-p_1 z} \xRightarrow{z=\frac{1}{p_2}} A = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{p_1-p_2}$$

$$B = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{1-p_1\frac{1}{p_2}} = \frac{p_2(1-p_1)(1-p_2)}{p_2-p_1}$$

$$P(Z=n) = Ap_1^n + Bp_2^n$$

– Έστω ότι $p_1=p_2$

$$P_Z(z) = \frac{(1-p)^2}{(1-pz)^2} = (1-p)^2\sum(n+1)p^n z^n \Rightarrow P(Z=n) = (n+1)(1-p)^2 p^n$$

## Μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes (L-S)

$X \geq 0$ τ.μ., τότε ορίζεται ο μετασχηματισμός L-S.

$$\tilde{F}_X(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\,dF(x) = \begin{cases} \sum e^{-sx} f_X(x) & \text{αν } X \text{ διακριτή τ.μ.} \\ \int_0^{+\infty} e^{-sx} f_X(x)\,dx & \text{“ συνεχής τ.μ.} \end{cases}$$

$$= E[e^{-sX}]$$

## Ιδιότητες Μετασχηματισμού L-S

1) $\tilde{F}_X(s)$ συγκλίνει τουλάχιστον στο $\{s\in\mathbb{C} : Re(s)\geq 0\}$
2) $\tilde{F}_X(s)$ προσδιορίζει μονοσήμαντα την κατανομή
3) $\tilde{F}_X(0)=1$
4) $E(X^n) = (-1)^n \tilde{F}_X^{(n)}(0)$ (παράγω για να βρω ροπές).
5) $X_1,\dots X_n$ ανεξάρτητες, $S_1 = \sum X_i \Rightarrow \tilde{F}_{S_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} \tilde{F}_{X_i}(s)$

6) $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητη και ισόνομη

Έστω $N$ ανεξάρτητη των $X_i$, ακέραια

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \Longrightarrow \tilde{F}_{S_N}(s) = P_N(\tilde{F}_X(s))$$

## Μετασχηματισμός Laplace - Stieltjes

$X \sim Exp(\lambda)$

σ.π.π. $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0$

μετασχηματισμός L-S : $\tilde{F}_X(s) = E(e^{-sX}) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f_X(x)dx$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-sx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{s+\lambda}$$

Παράδειγμα

Έστω $Y$ τ.μ. με μετασχηματισμό L-S

$$\tilde{F}_Y(s) = \frac{1}{2}\frac{3}{s+3} + \frac{2}{3}\frac{5}{s+5}$$

και θέλω να βρω σ.π.π. $f_Y(y)$

έχω $f_Y(y) = \frac{1}{3}e^{-3y} + \frac{2}{3}e^{-5y} \quad y > 0$

## Μάθημα 3° 22/2/2017.

## Η εκθετική κατανομή

1) Ορισμός (Μοντέλο)

Ιδέα: $X$ χρόνος (ζωής)

(Θέλω να μοντελοποιήσω χρόνους ζωής με αμνήμονη ιδιότητα)

i) $X \geq 0$

ii) $X$ συνεχής

iii) αμνήμονη ιδιότητα

$$P(X>t+s \mid X>t) = P(X>s) \quad \forall s,t$$

Αν $g(t) = P(X>t)$ θα πρέπει

λόγω του i, $g(0)=1$

λόγω του ii, $g(t)$ παρ/μη.

λόγω του iii, $g(s) = P(X>t+s \mid X>t) = \dfrac{P(X>t+s)}{P(X>t)} = \dfrac{g(t+s)}{g(t)}$

$$\Longrightarrow g(t+s) = g(t)g(s)$$

επαγωγικά αποδεικνύεται πως

$g(t_1+t_2+\ldots+t_n) = g(t_1)g(t_2)\ldots g(t_n)$

αν $t_1=t_2=\ldots=t_n=\frac{1}{n} \Longrightarrow g(1) = \left[g\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \Rightarrow g\left(\frac{1}{n}\right) = \left[g(1)\right]^{1/n}$

άρα $g\left(\frac{m}{n}\right) = g(\underbrace{\tfrac{1}{n}+\ldots+\tfrac{1}{n}}_{m}) = \left[g\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m = \left[g(1)\right]^{m/n}$

Συνεπώς, $g(q) = g(1)^q \quad \forall q>0, q\in\mathbb{Q}$

και λόγω συνέχειας, (θ. μεταφοράς) έχω $g(t) = \left[g(1)\right]^t \quad \forall t\in\mathbb{R}^+$

έστω $q_n \to t$, $q_n\in\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $g(t) = \lim\limits_{n\to\infty} g(q_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[g(1)\right]^{q_n} = \left[g(1)\right]^t$

αν θέσω $-\log(g(1)) = \lambda > 0$ τότε $g(t) = e^{-\log(g(1))t} = e^{-\lambda t}$

Οπότε $F_X(t) = P(X\leq t) = 1-e^{-\lambda t}$, $t>0$

και η σ.π.π $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

# Μετασχηματισμός L-S

$$\tilde{F}_X(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda+s} \qquad s>-\lambda.$$

$$E(X^n) = \tilde{F}_X^{(n)}(0)(-1)^n = (-1)^n \lambda(-1)(-2)\cdots(-n)(\lambda+s)^{-(n+1)}\Big|_{s=0} = \frac{n!}{\lambda^n}$$

διαδοχικής παρ/σεις όταν L-S

οπότε $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$

$$V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

## 2) Ρυθμός βλάβης/αποτυχίας

**Ορισμός**

Έστω $X$ τ.μ., $X \geq 0$ συνεχής (hazard rate failure rate)

Ορίζουμε $\lambda_X(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{P(t<X\leq t+h \mid X>t)}{h}$

Υπολογισμός $\lambda_X(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{P(t<X\leq t+h)}{h\cdot P(X>t)} = \frac{f_X(t)}{1-F_X(t)}$

άρα αν γνωρίζω την $F_X(t)$ ή $f_X(t)$ τότε μπορώ να βρω το $\lambda_X(t)$ και αντίστροφα αν γνωρίζω το $\lambda_X(t)$

έχω $\lambda_X(t) = -\frac{(1-F_X(t))'}{(1-F_X(t))} = \left[-\log(1-F_X(t))\right]' \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \int_0^t \lambda_X(u)\,du = -\log(1-F_X(t)) + \cancel{\log(1-F(0))}^{\,0} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F_X(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(u)du}, \; t>0 \xrightarrow{d/dt} f_X(t) = \lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(u)du} \quad t>0$$

συγκεκριμένα για την εκθετική κατανομή: $\lambda_X(t) = \lambda$

## Ιδιότητες Εκθετικής Κατανομής

(1) Αμνήμονη ιδιότητα: $X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow P(X>t+s \mid X>t) = P(X>s)$

(2) Ισχυρή αμνήμονη ιδιότητα: $\left.\begin{array}{l} X \sim Exp(\lambda) \\ Y \geq 0,\ X, Y \text{ ανεξ} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\rightarrow P(X>Y+s \mid X>Y) = P(X>s)$

Απόδειξη

$$P(X>Y+s \mid X>Y) = \frac{P(X>Y+s)}{P(X>Y)} \overset{*}{=} \frac{\int_0^{\infty} P(X>y+s) f_Y(y)\,dy}{\int_0^{+\infty} P(X>y) f_Y(y)\,dy}$$

* δεσμεύω ως προς μέση τιμή της Y

$$= \frac{e^{-\lambda s} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} f_Y(y)\,dy}{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} f_Y(y)\,dy} = e^{-\lambda s} = P(X>s)$$

3) Ιδιότητα Κατανομής minimum

Έστω $X_1, \dots X_n$ ανεξ, $X_i \sim Exp(\lambda_i)$, $i=1,\dots,n$.

τότε $\min(X_1,\dots,X_n) \sim Exp\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right)$

Απόδειξη

$$P(\min(X_1,\dots,X_n)>t) = P(X_1>t, \dots, X_n>t) \overset{\text{ανεξ}}{=\!=}$$

$$= P(X_1>t) \dots P(X_n>t) \overset{exp}{=\!=} e^{-\lambda_1 t} \dots e^{-\lambda_n t} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_n)t} \Longrightarrow \min(X_1 \dots X_n) \sim Exp\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right)$$

4) Ιδιότητα δείκτη minimum

$$\left.\begin{array}{l} X_1, \dots X_n \text{ ανεξ.} \\ X_i \sim Exp(\lambda_i)\ i=1,\dots n \end{array}\right\} \Rightarrow P(\min(X_1 \dots X_n) = X_i) = \frac{\lambda_i}{\sum \lambda_j}$$

Απόδειξη

$$P(\min(X_1,\dots,X_n) = X_i) = P(X_j \geq X_i,\ \forall j \neq i) \underset{X_i = y}{\overset{\text{δεσμεύω}}{=\!=}}$$

$$= \int_0^{+\infty} P(X_i \geq y) f_{X_i}(y)\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 y} \dots e^{-\lambda_n y} \lambda_i e^{-\lambda_i y}\,dy$$

$$= \lambda_i \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_n)y}\,dy = \frac{\lambda_i}{\sum \lambda_j}$$

5) Ιδιότητα ανεξαρτησίας και διάταξη minimum.

$$\left.\begin{array}{l} X_1, \dots X_n \text{ ανεξ} \\ X_i \sim Exp(\lambda_i) \ i=1,\dots,n \end{array}\right\} \Rightarrow \{N=i\} = \{\min(X_1 \dots X_n) = X_i\} \Longrightarrow$$

$N, \min(X_1,\dots,X_n)$ ανεξ.

(Μας ενδιαφέρει το minimum καθώς είναι το 1° πράγμα που θα συμβεί)

Απόδειξη

$$P(N=i, \min(X_1,\dots,X_n)>t) = P(\min(X_1 \dots X_n) = X_i > t)$$

$$= \int_t^{+\infty} P(X_j \geq y, j \neq i) f_{X_i}(y) dy = \int_t^{+\infty} e^{-\lambda_1 y} e^{-\lambda_2 y} \dots e^{-\lambda_n y} \cdot \lambda_i e^{-\lambda_i y} dy$$

$$= \lambda_i \int_t^{+\infty} e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) y} dy = \boxed{\lambda_i \frac{e^{-\sum \lambda_j}}{\sum \lambda_j}} = P(N=i) P(\min(X_1 \dots X_n) > t)$$

6) Ιδιότητα αλλαγής κλίμακας.

$$X \sim Exp(\lambda), \ a>0 \Rightarrow aX \sim Exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

7) Ιδιότητα αθροίσματος συγκεκριμένου αριθμού

$$X_1 \dots X_n \sim Exp(\lambda) \Longrightarrow S_n = \sum X_i \sim Erlang(n, \lambda)$$

σ.π.π. $f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \quad t>0$

σ.κ. $F_{S_n}(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$

8) Ιδιότητα αθροίσματος γεωμ. αριθμού

$$\left.\begin{array}{l} X_1, \dots, X_n \sim Exp(\lambda) \\ N \text{ ανεξ. τ.μ.}, P(N=n) = p(1-p)^{n-1}, \ n \geq 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim Exp(\lambda p)$$

9) Ιδιότητα διαστημάτων.

$X_1, \dots, X_n \sim Exp(\lambda)$ ανεξ.

Έστω $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ οι αντίστοιχες διατεταγμένες.

Ονομάζω $D_1 = X_{1:n}$, $D_2 = X_{2:n} - X_{1:n}$, $D_3 = X_{3:n} - X_{2:n} \dots$

Τότε $D_1 \sim Exp(n\lambda)$, $D_2 \sim Exp((n-1)\lambda) \dots$, $D_n \sim Exp(\lambda)$.

(αποδεικνύεται με χρήση της ιδιότητας 3 και της αμνήμονης ιδιότητας).

## Μάθημα 4ο 24/2/2017.
### Στοχαστική διαδικασία Poisson

1) **Διαίσθηση**

Τι θέλουμε να μοντελοποιήσουμε; Θέλουμε να φτιάξουμε μια διαδικασία $\{N(t)\}$ που θα μετράει πόσα γεγονότα έχουν συμβεί μέχρι τη στιγμή $t$ αν αυτά συμβαίνουν με εντελώς τυχαίο τρόπο.

$\{N(t)\}$ στοχαστική διαδικασία

$N(t) := \#$ γεγονότων στο $(0,t]$ που συμβαίνουν "εντελώς τυχαία", με ρυθμό $\lambda$.

**1η ιδιότητα**

Δεδομένης χρονικής στιγμής $t$, $\{N(s): 0 \le s \le t\}$ και $\{N(u)-N(t) : u>t\}$ είναι ανεξάρτητα

**2η ιδιότητα** (πώς διατυπώνω τον ρυθμό $\lambda$)

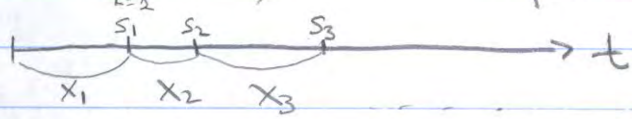
Μέσος ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών γεγονότων $= \frac{1}{\lambda}$.

Υπάρχουν 3 ισοδύναμοι ορισμοί της διαδικασίας Poisson.

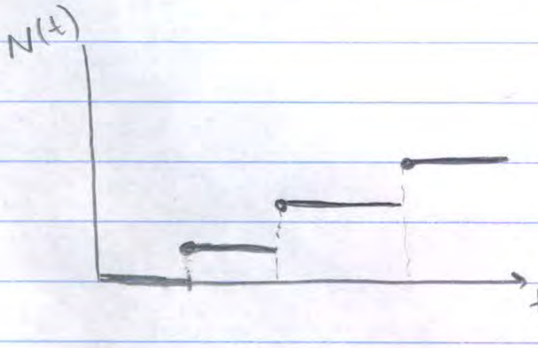
2) **Ορισμός I** (Ανανεωτικός, συνδέεται με ανανεωτική θεωρία).

Έστω $X_1, X_2, \ldots \sim Exp(\lambda)$, ανεξάρτητες και

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $N(t) = \sup\{n : S_n \le t\}$.




($S_n$, οι χρόνοι που συμβαίνουν τα γεγονότα).




Τότε $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού $\lambda$.

## 3) Βασικές Ιδιότητες

i) $S_n$ χρόνος $n$-οστού γεγονότος, $S_n \sim Erlang(n, \lambda)$.

άρα σ.π.π $f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}$, $t>0$

και σ.κ. $F_{S_n}(t) = \int_0^t f_{S_n}(u)du = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$, $t>0$.

$$E[S_n] = \frac{n}{\lambda}, \quad Var[S_n] = \frac{n}{\lambda^2}$$

ii) τι κατανομή ακολουθεί η $N(t)$;

$N(t) = \#$ γεγονότων ως τη στιγμή $t$

σ.π. $P(N(t)=n) = P(S_n \le t < S_{n+1}) = P(\{S_n \le t\} \cap \{S_{n+1} \le t\}^c) \overset{*}{=}$

$= P(S_n \le t) - P(S_{n+1} \le t) =$

$= \cancel{1} - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \cancel{1} + \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} =$

$= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

> $* \{S_{n+1} \le t\} \subseteq \{S_n \le t\}$
> αν γνωρίζω ότι το $n+1$ γεγονός συνέβη πριν την χρ. στιγμή $t$, τότε και το $n$ γεγονός συνέβη πριν την $t$.

Καταλήξαμε λοιπόν στο ότι $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$.

και $E[N(t)] = Var[N(t)] = \lambda t$.

Προσοχή!

σ.δ. Poisson με ρυθμό $\lambda$. $\{N(t)\}$, που ικανοποιεί τον ορισμό I.

τ.μ. Poisson με ρυθμό $\lambda$. $X \sim Poisson(\lambda)$

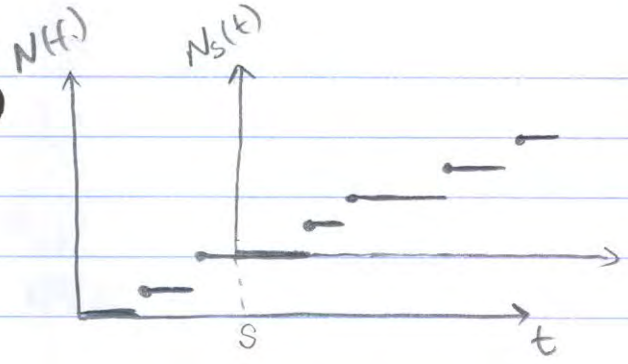
$P(X=x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2 \ldots$

Αν έχω $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού $\lambda$ $\Rightarrow$ $\forall t \ge 0$ $N(t)$ τ.μ. Poisson $(\lambda t)$

## 4) Αναγεννητική ιδιότητα της σ.δ. Poisson

Θεώρημα.

Αν $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού $\lambda$, $t \ge 0$ χρονική στιγμή τότε $\{N(u): 0 \le u \le t\}$ και $\{N_s(u): u \ge 0\}$ με $N_s(u) = N(s+u) - N(s)$ είναι ανεξάρτητες και η $\{N_s(u)\}$ είναι σ.δ. Poisson ρυθμού $\lambda$.




<u>Βασική Ιδέα</u>: Αν $N(s)=k$ τότε η $\{N(u): 0 \le u \le s\}$ καθορίζεται από $X_1, X_2, \ldots, X_k$ και $\{X_1+X_2+\ldots+X_{k+1} > s\}$.
Η $\{N_s(u): u \ge 0\}$ καθορίζεται από $X_{k+2}, X_{k+3}, \ldots$ και $X_{k+1} - (s - X_1 - \ldots - X_k)$, δεδομένου ότι $X_{k+1} > s - X_1 - \ldots - X_k$. Οπότε έχω τη ζητούμενη ανεξαρτησία λόγω της ισχυρής αμνήμονης ιδιότητας.

5) <u>Απαριθμήτριες διαδικασίες</u>

Μια $\{N(t)\}$ είναι απαριθμήτρια σ.δ.:
- οι τιμές της $\{N(t)\}$ είναι $0, 1, \ldots$ και $N(t)$ αύξουσα ως προς $t$
- έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις <u>ΑΝ</u> $\forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ οι τ.μ. $N(t_1), N(t_2)-N(t_1), \ldots, N(t_n)-N(t_{n-1})$ είναι ανεξ.
- έχει την ιδιότητα των ομογενών προσαυξήσεων <u>ΑΝ</u> $\forall t, s$ η κατανομή της $N(t+s)-N(s)$ δεν εξαρτάται από το $s$.

Η σ.δ. Poisson έχει τις παραπάνω ιδιότητες και μάλιστα τις χαρακτηρίζουν.

6) <u>Ορισμός II (Ολικός)</u>

Αν $\{N(t)\}$ απαριθμήτρια σ.δ. και έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις και $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ δηλαδή $P(N(t)=n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2 \ldots$ τότε η $\{N(t)\}$ λέγεται σ.δ. Poisson με ρυθμό $\lambda$.

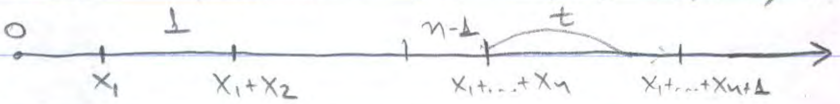
7) <u>Ισοδυναμία ορισμών I κ II</u>

I ⇒ II Αναγεννητική ιδιότητα + 2η ιδιότητα απαριθμήτριας.

II ⇒ I Έστω $\{N(t)\}$ όπως στον ορισμό II και $X_1, X_2, \ldots$ οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων τότε:

$$P(X_1 > t) = P(N(t)=0) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t} \Rightarrow X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$$

Επίσης $P(X_{n+1}>t \mid X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n) =$




$= P($0 γεγονότα στο διάστημα $(x_1+\dots+x_n, x_1+x_2+\dots+x_n+t)) \mid$
ιστορία της $N(t)$ στο $(0, x_1+x_2+\dots+x_n] =$
(η δέσμευση φεύγει λόγω των ανεξ. προσαυξήσεων).
$= P(N(t)=0) = e^{-\lambda t}$
$\Rightarrow X_{n+1} \sim Exp(\lambda)$ και είναι ανεξ. από τις $X_1, X_2, \dots, X_n$.

8) Ορισμός III (Τοπικός)

Αν $\{N(t)\}$ απαριθμήτρια σ.δ. με ανεξάρτητες και σταθερές προσαυξήσεις και

$$P(N(h)=n) = \begin{cases} 1-\lambda h+o(h), & n=0 \\ \lambda h+o(h), & n=1 \\ o(h), & n\geq 2 \end{cases}, \text{ όπου } o(h) \text{ τ.ω. } \lim_{h\to 0^+}\frac{o(h)}{h}=0.$$

τότε η $\{N(t)\}$ λέγεται σ.δ. Poisson ρυθμού $\lambda$.

9) Ισοδυναμία Ορισμών II κ' III

(II → III) $P(N(h)=0) = e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^0}{0!} = e^{-\lambda h} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda h)^k}{k!} = 1-\lambda h+o(h)$

$$P(N(h)=1) = e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^1}{1!} = (1-\lambda h+o(h))\lambda h =$$
$$= \lambda h - \underbrace{\lambda h^2 + h\cdot o(h)}_{o(h)} = \lambda h + o(h)$$

$n\geq 2$, $P(N(h)=n) = e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^n}{n!} = o(h)$.

(III → II) $P_n(t)=P(N(t)=n)$, κοιτάζω την εξέλιξη της $N(t)$ στο διάστημα $[0,t+h]=[0,t]\cup[t,t+h]$

- $P_0(t+h)=p_0(t)\cdot p_0(h) = p_0(t)(1-\lambda h+o(h)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t)+\frac{o(h)}{h} \xRightarrow{h\to 0^+} p_0'(t)=-\lambda p_0(t) \Rightarrow p_0(t)=ce^{-\lambda t}$

$\xRightarrow[c=1]{P_0(0)=1} p_0(t)=e^{-\lambda t}$. (1)

- Για $n\geq 1$, $P_n(t+h)=P_n(t)P_0(h)+P_{n-1}(t)P_1(h)+\boxed{\overbrace{\sum_{k=2}^{n}P_{n-k}(t)P_k(h)}^{o(h)}} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_n(t+h)=P_n(t)-\lambda h p_n(t)+P_{n-1}(t)\lambda h+o(h) \Rightarrow$

$$\Longrightarrow \frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0^+}$$

$$\Longrightarrow \boxed{p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)} \quad (2) \qquad // \quad (1),(2)\ \Sigma.\Delta\text{ιαφ. εξισώσεων.}$$

Έχουμε: $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ και επίσης $p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$

$$\Longrightarrow p_n'(t) + \lambda p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t)$$

Για να προχωρήσω θέλω ν.δ.ο $P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $n \geq 0$.

α' τρόπος: επαγωγή (δύσκολο).

β' τρόπος: πιθανογεννήτριες:

Έστω $P(z) = E[z^{N(t)}] = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(t) z^n = (1)\cdot z^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (2) z^n \Rightarrow$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} p_n'(t) z^n = -\lambda \sum p_n(t) z^n + \lambda z \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1}(t) z^{n-1}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt} P_{N(t)}(z) = -\lambda(1-z) P_{N(t)}(z) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\log P_{N(t)}(z)\right] = -\lambda(1-z)$$

$$\Longrightarrow \log P_{N(t)}(z) = -\lambda t(1-z)$$

$$\Longrightarrow P_{N(t)}(z) = c e^{-\lambda t(1-z)}$$, βρίσκω $c=1$ αντικαθιστώντας $z=1$

$$\Longrightarrow P_{N(t)}(z) = e^{-\lambda t} e^{\lambda t z} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} z^n \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$