Μάθημα 5°   1/3/2017.

Στοχαστική Διαδικασία Poisson

1) Υπενθυμίσεις (ορισμοί)

$\{N(t)\}$ σ.δ Poisson ρυθμού λ

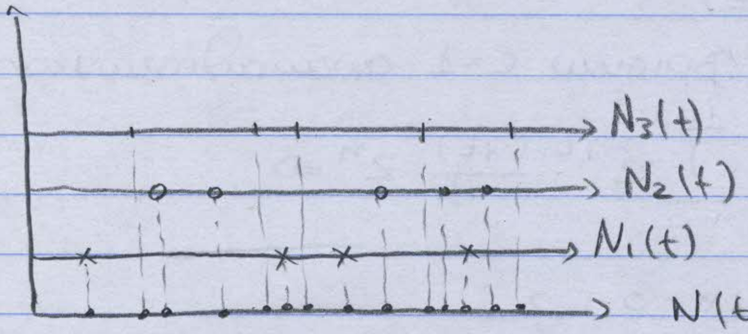
$\overset{(I)}{\Longleftrightarrow}$ Χρόνοι μεταξύ των γεγονότων $\sim Exp(\lambda)$, ανεξ

$\overset{(II)}{\Longleftrightarrow}$ Ανεξ. ομογενής προσαυξήσεις, $\forall t$, $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$

$\overset{(III)}{\Longleftrightarrow}$ Ανεξ. ομογενής προσαυξήσεις

$$P(N(t+h) = i+n \mid N(t)=i) = \begin{cases} 1-\lambda h + o(h) & , n=0 \\ \lambda h + o(h) & , n=1 \\ o(h) & , n \geq 2 \end{cases} \quad \text{και } \lim_{h \to 0^+} \frac{o(h)}{h} = 0$$

2) Υπέρθεση διαδικασιών Poisson



$N(t) \leftarrow$ Υπέρθεση των $\{N_1(t)\}$, $\{N_2(t)\}$, $\{N_3(t)\}$

Ορισμός

Έστω $\{N_i(t)\}$, $i=1,2,\ldots$ ανεξάρτητες σ.δ και $N(t) = \sum_i N_i(t)$

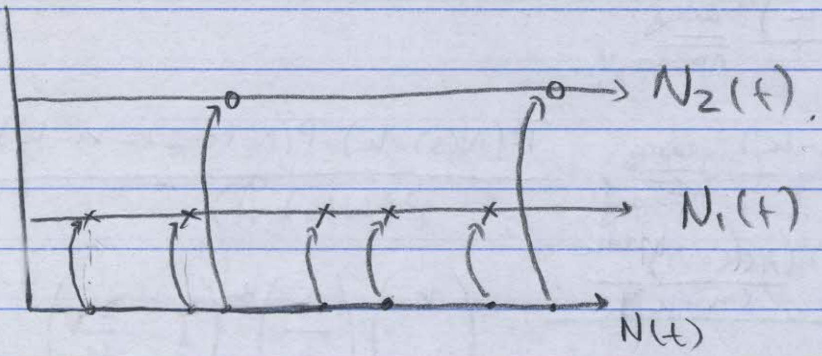
Τότε η $\{N(t)\}$ λέγεται υπέρθεση των $N_i(t)$.

Θεώρημα

$\left.\begin{array}{l} \{N_i(t)\} \text{ σ.δ. Poisson ρυθμού } \lambda_i \\ \text{ανεξ.} \\ \{N(t)\} \text{ η υπέρθεσή τους} \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\{N(t)\}$ σ.δ Poisson ρυθμού $\sum_i \lambda_i$ και κάθε γεγονός της $\{N(t)\}$ προέρχεται από την $\{N_i(t)\}$ με πιθανότητα $\lambda_i / \sum_j \lambda_j$

Αν $\{Z_k = i\}$ = k-οστό γεγονός της $\{N(t)\}$ προέρχεται από την $\{N_i(t)\}$
και $Z_1, Z_2, \ldots$ είναι ανεξ. ισον. και
$P(Z_k = i) = \frac{\lambda_i}{\sum_j \lambda_j}$

3) Διάσπαση διαδικασίας Poisson.



Ορισμός
$\{N(t)\}$ απαριθμήτρια σ.δ. και $Z_1, Z_2, \ldots$ ανεξ. ισον. με
$P(Z_k = i) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots k$
Αν $N(t)$ = # γεγονότων τύπου $i = \sum_{k=1}^{N(t)} 1\{Z_k = i\}$. τότε λέμε ότι οι $\{N_i(t)\}, i = 1, 2, \ldots k$ αποτελούν διάσπαση της $\{N(t)\}$.

Θεώρημα
$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson και κάθε γεγονός της καταγράφεται ως τύπου i, με πιθανότητα p_i ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα και $N_i(t)$ = # γεγονότων τύπου i στο $(0, t]$, τότε $\{N_i(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λp_i, $i = 1, 2, \ldots, i$ και $\{N_1(t)\}, \{N_2(t)\}, \ldots, \{N_k(t)\}$ ανεξάρτητες

*** Υπενθύμιση ***

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \ldots X_n \sim Exp(\lambda) \\ P(N = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad k \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} X_k \sim Exp(\lambda p)$$

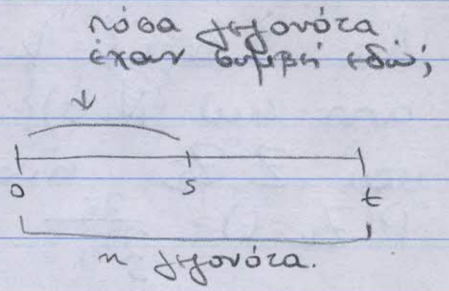
Απόδειξη με βάση τον ορισμό I.

4) Άσκηση.

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ

$0<s<t$

Θέλω την κατανομή $(N(s)|N(t)=n)$



Λύση

$$P(N(s)=k|N(t)=n) = \frac{P(N(s)=k,\ N(t)=n)}{P(N(t)=n)} =$$

$$= \frac{P(N(s)=k,\ N(t)-N(s)=n-k)}{P(N(t)=n)} \ \frac{\text{ανεξ.}}{\text{προσαυξ.}}$$

$$= \frac{P(N(s)=k)\cdot P(N(t)-N(s)=n-k)}{P(N(t)=n)} \ \frac{\text{ομογ.}}{\text{προσαυξ.}} \ \frac{P(N(s)=k)\cdot P(N(t-s)=n-k)}{P(N(t)=n)}$$

$$\underline{\underline{N(t)\sim Poisson(\lambda t)}} \quad \frac{\cancel{e^{-\lambda s}}\ \frac{(\cancel{\lambda}s)^k}{k!}\ \cancel{e^{-\lambda(t+s)}}\ \frac{(\cancel{\lambda}(t+s))^{n-k}}{(n-k)!}}{\cancel{e^{-\lambda t}}\ \frac{(\cancel{\lambda}t)^n}{n!}} = \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

$Bin\left(n, \frac{s}{t}\right)$

** $N(a)-N(b) = \#$ γεγονότων στο $(a,b] =$

$= \#$ γεγονότων στο διάστημα μήκους $b-a$ $=$

$= N(b-a)-N(0)$.

$N(a)-N(b) \overset{d}{=} N(b-a)$ ισόνομες αλλά όχι ίσες.

5) Άσκηση

$\{N_1(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ_1

$\{N_2(t)\}$ " " " λ_2 ανεξ.

$\{N(t)\}$ υπέρθεση τους. Θέλω ν.δ.ο

$(N_1(t)|N(t)=n) \sim Bin\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$

Απόδειξη

$$P(N_1(t)=k|N(t)=n) = \frac{P(N_1(t)=k,\ N(t)=n)}{P(N(t)=n)} =$$

$$= \frac{P(N_1(t)=k, N_2(t)=n-k)}{P(N(t)=n)} \underset{\substack{\{N_1(t)\} \\ \{N_2(t)\} \text{ ανεξ.}}}{=} \frac{P(N_1(t)=k)\, P(N_2(t)=n-k)}{P(N(t)=n)}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda_1 t}} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} \cancel{e^{-\lambda_2 t}} \frac{(\lambda_2 t)^{n-k}}{(n-k)!}}{\cancel{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}} \frac{((\lambda_1+\lambda_2)t)^n}{n!}} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}.$$

6) Άσκηση

$\{N_1(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ_1

$\{N_2(t)\}$ σ.δ. Poisson " λ_2 ανεξάρτητες

$S_k^{(i)}$ = χρόνος του k-οστού γεγονότος της $\{N_i(t)\}$, $i=1,2$, $k=1,2,\ldots$

και θέλω την κατανομή $N_1(S_1^{(2)})$ = # γεγονότων της $\{N_1(t)\}$ μέχρι το 1^o γεγονός της $\{N_2(t)\}$

Θα δείξουμε ότι $P(N_1(S_1^{(2)})=k) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$, $k=0,1,2\ldots$

Απόδειξη

α' τρόπος (χωρίς χρήση θεωρ. υπέρθεσης)

$$P(N_1(\underbrace{S_1^{(2)}}_{\sim Exp(\lambda_2)})=k) \overset{\text{δεσμ.}}{\underset{S_1^{(2)}}{=}} \int_0^\infty P(N(t)=k \mid \cancel{S_1^{(2)}=t})\, \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} = \frac{\lambda_1^k \lambda_2}{k!} \int_0^\infty t^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\, dt =$$

$$= \frac{\lambda_1^k \lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^{k+1}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^{k+1}}{k!} t^{k+1-1} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\, dt}_{} \rightarrow \text{σ.π.π } Erlang(k+1, \lambda_1+\lambda_2)$$

$$= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$$

β' τρόπος (με θεώρ. υπέρθεσης)

$\{N(t)\}$ υπέρθεση των $\{N_1(t)\}$, $\{N_2(t)\}$ και

$Z_1, Z_2 \ldots$ οι τύποι των γεγονότων της $\{N(t)\}$

Τότε $P(N_1(S_1^{(2)})=k)=P(Z_1=1, Z_2=1, \ldots, Z_k=1, Z_{k+1}=2)=$

$$= P(Z_1=1)\cdot P(Z_2=1)\ldots P(Z_k=1)\cdot P(Z_{k+1}=2)=$$

$$=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

Μάθημα 6ο   3/3/2017.

Διαδικασία Poisson Θεώρημα Campbell

1) <u>Πρόβλημα</u>

S_n = Χρόνος n-οστού γεγονότος $\sim Erlang(n, \lambda)$

$(S_k | N(t)=n)$ δεσμευμένος χρόνος k-οστού γεγονότος δεδομένου ότι στο $(0,t]$ έχω n γεγονότα.

Πιο γενικά:

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ, $S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι των γεγονότων τότε

$(S_1, S_2, \ldots S_n | N(t)=n) \sim$;

<u>Διαίσθηση</u>:

$n=1$ 1 γεγονός $(S_1 | N(t)=1) \sim$;

Εικασία: $(S_1|N(t)=1) \sim Uniform([0,t])$

$E[S_1|N(t)=1] = \frac{1}{2}$.

<u>Απόδειξη</u>

$F_{S_1|N(t)=1}(x) = P(S_1 \leq x | N(t)=1)$

$x<0$, $P(S_1 \leq x | N(t)=1) = 0$.

$x>t$, $P(S_1 \leq x | N(t)=1) = 1$.

$0 \leq x \leq t$, $P(\overset{*}{N}(x) \geq 1 | N(t)=1) =$ $^*\{S_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\}$

$$= \frac{P(N(x)\geq 1, N(t)=1)}{P(N(t)=t)} = \frac{P(N(x)=1, N(t)=1)}{P(N(t)=1)} =$$

$$= \frac{P(N(x)=1, N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)} \underset{\text{προσ.}}{\overset{\text{ανεξ.}}{=}} \frac{P(N(x)=1)\cdot P(N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda x}} \frac{(\lambda x)^1}{1!} \cancel{e^{-\lambda(t-x)}} \frac{(\lambda(t-x))^0}{0!}}{\cancel{e^{-\lambda t}} \frac{(\lambda t)^1}{1!}} = \frac{x}{t}$$

Άρα

$$F_{S_1|N(t)=1}(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x}{t} & 0\le x<t \\ 1 & x\ge t \end{cases}$$ συνάρτηση κατανομής της ομοιόμορφης στο $[0,t]$.

2) <u>Θεώρημα Campbell</u>

Αν $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ, με χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \dots$, τότε $(S_1, S_2, \dots, S_n | N(t)=n) \underset{\text{ίδια κατανομή}}{\overset{d}{=}} (U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n})$

όπου οι $U_{1:n}, \dots, U_{n:n}$ είναι διατεταγμένες τ.μ. από n ανεξ. ισόνομες $U_1, U_2, \dots, U_n \sim Unif([0,t])$.

3) <u>Διατεταγμένες τυχαίες μεταβλητές</u>

Έστω $X_1, X_2, \dots X_n$ τ.μ. και ορίζω $X_{i:n}$ η i-οστή μικρότερη από αυτές.

π.χ. $X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$

$X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n)$

αν γνωρίζω την σ.κ. της $(X_1, \dots X_n)$ μπορώ να βρω την σ.κ. της $(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})$; Γενικά όχι, αλλά αν $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες με σ.κ $F(x)$ και σ.π.π $f(x)$.

$F_{X_{i:n}}(x) = P(X_{i:n} \le x) = P(\text{τουλ. } i \text{ από τις } X_1 \dots, X_n \text{ να έχουν τιμή} \le x)$

$$= \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} (F(x))^k (1-F(x))^{n-k}$$

$f_{X_{i:n}}(x) = F'_{X_{i:n}}(x) = \dots$

"Άμεσος" υπολογισμός της $f_{X_{i:n}}(x)$

$$f_{X_{i:n}}(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{P(x < X_{i:n} \le x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\binom{n}{i-1}\binom{n-i+1}{1}(F(x))^{i-1}(F(x+h)-F(x))(1-F(x+h))^{n-i}}{h} =$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!\,1!\,(n-i)!} F(x)^{i-1} f(x)(1-F(x))^{n-i}$$

Οπότε,

$X_1 \ldots X_n$ με σ.κ $F(x)$, σ.π.π $f(x)$

$$F_{X_{i:n}}(x) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} F(x)^k (1-F(x))^k$$

$$f_{X_{i:n}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!\,1!\,(n-i)!} F(x)^{i-1} f(x)(1-F(x))^{n-i}.$$

$i<j$

$$f_{X_{i:n},X_{j:n}}(x,y) = \begin{cases} 0 & y<x \\ \dfrac{n!\,F(x)^{i-1} f(x)(F(y)-F(x))^{j-i-1} f(y)(1-F(y))^{n-j}}{(i-1)!\,1!\,(j-i-1)!\,1!\,(n-j)!} & x\le y \end{cases}$$

$$f_{X_{1:n},X_{2:n},\ldots,X_{n:n}}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \begin{cases} n!\,f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n), & x_1\le x_2\le\ldots\le x_n \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

4) <u>Διατεταγμένη σ.μ. από ομοιόμορφη ανεξ. κ' ισόνομης</u>

$U \sim \text{Uniform}([0,t])$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \frac{x}{t} & 0\le x\le t \\ 1 & x>t \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{t} & 0\le x\le t \\ 0 & \text{διαφ.} \end{cases}$$

και $$F_{U_{i:n}}(x) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{x}{t}\right)^k\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-k} \quad 0\le x\le t.$$

$$f_{U_{i:n}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!\,1!\,(n-i)!}\left(\frac{x}{t}\right)^{i-1}\frac{1}{t}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-i} \quad 0\le x\le t.$$

$$\to f_{U_{1:n},\dots,U_{n:n}}(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases}\frac{n!}{t^n} & 0\le x_1<x_2<\dots\le t\\ 0 & \text{διαφ.}\end{cases}$$

$$\to E(U_{i:n})=\int_0^t x\cdot f_{U_{i:n}}(x)\,dx=\int_0^t \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\left(\frac{x}{t}\right)^{i-1}\frac{1}{t}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-i}dx \ \underline{\underline{\frac{x}{t}=u}}$$

$$=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\underbrace{\int_0^n u^i(1-u)^{n-i}\,du}_{B(i+1,\,n-i+1)}$$

$$=\frac{n!\,t}{(i-1)!(n-i)!}\,\frac{i!(n-i)!}{(n+1)!}=\frac{i\,t}{n+1}$$

Συνάρτηση Βήτα.

$$B(a,b)=\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\ \underline{\underline{a,b\in\mathbb{Z}}}=\frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}$$

5) <u>Απόδειξη Θεωρήματος Campbell</u>

$$f_{S_1,S_2,\dots,S_n|N(t)=n}(s_1,s_2,\dots,s_n)=$$

$$=\lim_{h_1,\dots,h_n\to0^+}\frac{P(s_1\le S_1\le s_1+h_1, s_2\le S_2\le s_2+h_2,\dots,s_n\le S_n\le s_n+h_n, N(t)=n)}{h_1h_2\dots h_n\cdot P(N(t)=n)}=$$

$$=\lim_{h_1\dots h_n\to0^+}\frac{\cancel{e^{-\lambda s_1}}\,\cancel{e^{-\lambda h_1}}\,\cancel{\lambda h_1}\,\cancel{e^{-\lambda(s_2-s_1-h_1)}}\,\cancel{e^{-\lambda h_2}}\,\cancel{\lambda h_2}\dots\cancel{e^{-\lambda h_n}}\,\cancel{\lambda h_n}\,\cancel{e^{-\lambda(t-s_n-h_n)}}}{\cancel{h_1h_2\dots h_n}\,\cancel{e^{-\lambda t}}\,\frac{(\cancel{\lambda}t)^n}{n!}}=$$

$$=\frac{n!}{t^n}=f_{U_{1:n},\dots,U_{n:n}}(s_1,\dots,s_n)$$

6) <u>Πρακτική σημασία Θ. Campbell</u>

Για υπολογισμούς είναι: $P((S_1,S_2,\dots,S_n)\in A\,|\,N(t)=n)=P((U_{1:n},\dots,U_{n:n})\in A)$.

$E[f(S_1\dots S_n)|N(t)=n]=E[f(U_{1:n},\dots,U_{n:n})]$.

7) Παρατήρηση

$1 \leq i \leq n$, $E[S_i | N(t)=n] = E[U_{i:n}] = \frac{it}{n+1}$

$i \geq n+1$ $E[S_i | N(t)=n] = t + \frac{i-n}{\lambda}$