Μάθημα 7° 8/3/2017.

Διαδικασία Poisson, Γενικεύσεις - Ασκήσεις

1) Μη ομογενής διαδικασία Poisson

Ορισμός (Τοπικός)

Μια απαριθμήτρια σ.δ. $\{N(t)\}$ ($N(t)$ ↑ ως προς t, $N(t) \in \{0,1,2\ldots\}$) λέγεται σ.δ. Poisson μη-ομογενής με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$ αν

i) έχει ανεξ. προσαυξήσεις: $t_1 < t_2 < \ldots < t_n \longrightarrow$

$N(t_1), N(t_2)-N(t_1) \ldots, N(t_1)-N(t_{n-1})$ ανεξ.

ii) $$P(N(t+h)=n+j \mid N(t)=j)=\begin{cases} 1-\lambda(t)h+o(h) & n=0 \\ \lambda(t)h+o(h) & n=1 \\ o(h) & n\geq 2 \end{cases}$$ όπου $\frac{o(h)}{h} \to 0$ καθώς $h \to 0^+$

Ορισμός (Ολικός)

Μια απαριθμήτρια σ.δ. $\{N(t)\}$ λέγεται μη ομογενής σ.δ. Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$ αν

i) έχει ανεξ. προσαυξήσεις

ii) $N(t+s)-N(t) \sim \text{Poisson}\left(\int_t^{t+s} \lambda(u)\,du\right) \rightarrow$ $$P(N(t+s)-N(t)=n) = e^{-\int_t^{t+s}\lambda(u)du} \frac{\left(\int_t^{t+s}\lambda(u)du\right)^n}{n!}$$

Οι ορισμοί είναι ισοδύναμοι και οι αποδείξεις είναι αντίστοιχες με της ομογενούς σ.δ. Poisson.

2) Σύνθετη σ.δ. Poisson

Αν $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ και $Y_1, Y_2, \ldots$ ανεξ. ισόνομες τ.μ. $\sim F(x)$ και $Y(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$, $t\geq 0$ τότε η $\{Y(t)\}$ λέγεται σύνθετη διαδικασία Poisson ρυθμού λ και σ.κ. μεγέθους αλμάτων (ή ομάδων) $F(x)$

3) Μη ομογενής διάσπαση σ.δ. Poisson.

Θεώρημα

Έστω $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ και κάθε γεγονός της $\{N(t)\}$ που συμβαίνει τη στιγμή t καταγράφεται ως τύπου i με πιθανότ. $P_i(t)$, $i=1,2,\dots,n$. Θέτω $N_i(t)=\#$ γεγονότων τύπου i στο $(0,t]$. Τότε $\{N_i(t)\}$ είναι μη ομογενής σ.δ. Poisson με ρυθμό $\lambda_i(t)=\lambda p_i$, $i=1,2,\dots$

Απόδειξη.

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού $\lambda \Longrightarrow$

i) ανεξ. προσαυξήσεις

$$ii)\ P(N(t+h)=n+j\mid N(t)=j)=\begin{cases}1-\lambda h+o(h) & n=0\\ \lambda h+o(h) & n=1\\ o(h) & n\geq 2\end{cases}\quad \text{όπου } \frac{o(h)}{h}\to 0 \text{ καθώς } h^{+}\to 0.$$

Κάθε γεγονός καταγράφεται με πιθανότητα $p_i(t)$ ανεξ. από τα άλλα.

$\Longrightarrow$ i) έχει ανεξ. προσαυξήσεις

$$ii)\ P(N_i(t+h)=n+j\mid N_i(t)=j)=\begin{cases}\overbrace{1-\lambda h+o(h)+(\lambda h+o(h))(1-p_i(t))}^{=1-\lambda p_i(t)h+o(h)} & n=0\\ \lambda p_i(t)+o(h) & n=1\\ o(h) & n\geq 2\end{cases}$$

4) Άσκηση 1

Γεννήσεις συμβαίνουν σε μαιευτήριο σύμφωνα με σ.δ. Poisson ρυθμού $\lambda=24$ γεν/ημέρα. Σήμερα είναι 8 Μαρτίου.

i) P(10 γεννήσεις σήμερα) = ;

ii) P(10 γεννήσεις αύριο | 30 γεν. σήμερα) = ;

iii) Αναμενόμενη ώρα γέννησης $3^{ου}$ παιδιού δεδομ. ότι σήμερα είχαμε 11 γεννήσεις.

iv) P(100 γεννήσεις από 8-11 Μαρτίου | Αύριο θα έχουμε 30 γεν) = ;

v) P(15 γεννήσεις σήμερα: 9 αγόρια, 6 κορίτσια) = ;

vi) P(10 γεννήσεις σήμερα: ΑΑΑΑΑΑΚΑΚΚ) = ;

vii) P(γεννήσεις αγοριών σήμερα | 30 γεν. σήμερα κ' αύριο) = ;

Λύση

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson των γεννήσεων (t σε μέρες)
$\{N_1(t)\}$ " " " των αγοριών.
$\{N_2(t)\}$ " " των κοριτσιών
$S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι γεννήσεων ξεκινώντας απο την αρχή της 8ης Μαρτίου (μεσάνυχτα).

i) $P(N(1)=10) = e^{-24\cdot 1} \dfrac{(24\cdot 1)^{10}}{10!}$

ii) $P(10 \text{ γεν. αύριο} \mid 30 \text{ γεν. σήμερα}) = P(N(2)-N(1)=10 \mid N(1)=30)$
$\underset{\text{προσαυξ.}}{\overset{\text{ανεξ.}}{=}} P(N(2)-N(1)=10) \underset{\text{προσ.}}{\overset{\text{στ.}}{=}} P(N(1)=10)$ (το βρήκαμε στο (i))

iii) $E[S_3 \mid N(1)=11] = E[\underset{\substack{\downarrow \\ \text{3η διατετ. απο 11 ανεξ. ισόν.} \sim U([0,1])}}{U_{3:11}}] = \dfrac{3\cdot 1}{12} = \dfrac{1}{4}$ μέρας $\left(\begin{array}{c}\text{απο τύπο} \\ it/n+1\end{array}\right)$

$\Longrightarrow$ αναμενόμενη ώρα γέν. του 3ου παιδιού | 11 γεννήσεων είναι 6 το πρωί.

iv) $P(N(4)=100 \mid N(2)-N(1)=30) = P(\underbrace{N(4)-N(2)}+\underbrace{N(1)}=70 \mid \underbrace{N(2)-N(1)}=30)$ ανεξ.

$\underset{\text{προσ.}}{\overset{\text{ανεξ.}}{=}} P(N(4)-N(2)+N(1)=70)$. $\underset{\text{προσ.}}{\text{στ.}}$ $\left.\begin{array}{l} N(1) \sim \text{Poisson}(24\cdot 1) \\ N(4)-N(2) \sim \text{Poisson}(24\cdot 2)\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Longrightarrow N(4)-N(2)+N(1) \sim \text{Poisson}(\underbrace{24+48}_{=72})$

άρα $P(N(4)-N(2)+N(1)=70) = e^{-72} \dfrac{(72)^{70}}{70!}$

v) $P(15 \text{ γεν. σήμερα}: 9 \text{ αγόρια}, 6 \text{ κορίτσια}) =$
$= P(N(1)=15, N_1(1)=9, N_2(1)=6) = P(N_1(1)=9, N_2(1)=6)$
$\underset{\{N_1(t)\},\{N_2(t)\}}{\overset{\text{ανεξ. προσ.}}{=}} P(N_1(1)=9)\cdot P(N_2(1)=6) = e^{-24\cdot\frac{1}{2}\cdot 1} \dfrac{(24\cdot\frac{1}{2}\cdot 1)^9}{9!} e^{-24\cdot\frac{1}{2}\cdot 1} \dfrac{(24\cdot\frac{1}{2}\cdot 1)^6}{6!}$

$= e^{-24} \dfrac{12^{5}}{9!\,6!}$

vi) P(10 γεννήσεις σήμερα: ΑΑΑΑΑΑΚΑΚΚ) $=$

$$= P(N(1)=10, Z_1=A, Z_2=A, \ldots, Z_{10}=K) =$$

$$= e^{-24}\frac{24^{10}}{10!}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = e^{-24}\frac{12^{10}}{10!}$$

vii) P(5 γεν αγοριών σήμερα | 30 γεν. σήμερα & αύριο) $=$

$$= P(N_1(1)=5 \mid N(2)=30) = \frac{P(N_1(1)=5, N(2)=30)}{P(N(2)=30)} =$$

$$= \frac{\sum_{k=5}^{30} P(N_1(1)=5, N(1)=k, N(2)=30)}{P(N(2)=30)} =$$

$$= \frac{\sum_{k=5}^{30} P(N_1(1)=5, N_2(1)=k-5, N(2)-N(1)=30-k)}{P(N(2)=30)}$$

Θεώρ. διάσπασης, ανεξ. προσαυξ.

$$= \frac{\sum_{k=5}^{30} P(N_1(1)=5)\cdot P(N_2(1)=k-5)P(N(2)-N(1)=30-k)}{P(N(2)=30)}$$

$$= \frac{\sum_{k=5}^{30} e^{-12}\frac{12^5}{5!}e^{-12}\frac{12^{k-5}}{(k-5)!}e^{-24}\frac{24^{30-k}}{(30-k)!}}{e^{-48}\frac{48^{30}}{30!}}$$

$$= \frac{30!}{25!5!}\frac{12^5}{48^{30}}\sum_{k=5}^{30}\frac{25!\,12^{k-5}\,24^{30-k}}{(k-5)!(30-k)!} =$$

$$= \binom{30}{5}\frac{12^5}{48^{30}}\sum_{k=5}^{30}\binom{25}{k-5}12^{k-5}24^{30-k} \overset{k-5=j}{=}$$

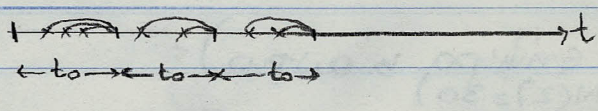
$$= \binom{30}{5}\frac{12^5}{48^{30}}\sum_{j=0}^{25}\binom{25}{j}12^j 24^{25-j} =$$

$$= \binom{30}{5}\frac{12^5\cdot 36^{25}}{48^{30}}.$$

8° Μάθημα 10/3/17

Διαδικασία Poisson, Ασκήσεις - Εφαρμογές

1) Πρόβλημα



Σταθμός μεταφορικού μέσου οι επιβάτες φτάνουν σύμφωνα με σ.δ. Poisson ρυθμού λ. Τα μεταφ. μέσα φθάνουν κάθε t_o χρον. μονάδες.

Μακροπρόθεσμος ρυθμός χαμένων ωρών αναμονής $= \lim_{t\to\infty} \dfrac{E[\text{Συνολικός χρόνος αναμ. στο } [0,t]]}{t} =$

$$= \frac{E[\text{Συνολικός χρόνος αναμονής στο } [0,t_o]]}{t_o} \quad *$$

Έχουμε $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ, αφίξεων επιβατών και $S_1, S_2 \dots$ οι χρόνοι αφίξεων επιβατών.

$$* = \frac{E\left[\sum_{i=1}^{N(t_o)}(t_o - S_i)\right]}{t_o}$$

Θα υπολογίσουμε αρχικά τον αριθμητή.

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t_o)}(t_o - S_i)\right] = E[t_o N(t_o)] - t\left[\sum_{i=1}^{N(t_o)} S_i\right] =$$

$$= t_o \underbrace{E[N(t_o)]}_{\lambda t_o} - \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t_o)=n)\cdot E\left[\sum_{i=1}^{N(t_o)} S_i \,\middle|\, N(t_o)=n\right]$$

άθροισμα με αρ. προσθετέων τ.μ. δεσμεύω ως προς την τιμή της τ.μ.

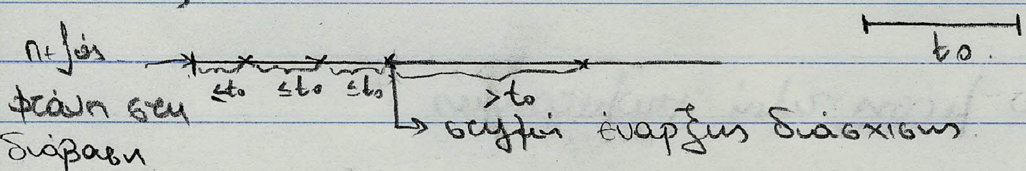
Όμως $E\left[\sum_{i=1}^{N(t_o)} S_i \,\middle|\, N(t_o)=n\right] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E[S_i \mid N(t_o)=n]}_{\substack{\text{Θ. Campbell} \\ E[U_{i:n}] = \frac{i t_o}{n+1}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i t_o}{n+1} = \frac{t_o}{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$

$$= \frac{n t_o}{2}$$

Άρα μακροπρ. ρυθμός χαμένων ωρών αναμονής $= \dfrac{\lambda t_o^2 - \frac{t_o}{2}\sum_{n=0}^{\infty} P(N(t_o)=n)\cdot n}{t_o} = \dfrac{\lambda t_o^{\cancel{2}}}{2\cancel{t_o}} = \dfrac{\lambda t_o}{2}.$

2) Πρόβλημα 2

Πεζός θέλει να διασχίσει διάβαση. Έστω t_0 ο χρόνος διάσχισης. Τα αυτοκίνητα περνάνε τη διάβαση σύμφωνα με σ.δ. Poisson ρυθμού λ. Ο πεζός αρχίζει τη διάσχιση αν ο χρόνος διέλευσης του επόμενου αυτοκινήτου είναι μεγαλύτερος του t_0. Έστω X = χρόνος για έναρξη διάσχισης. $E(X) = ;$



$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson με χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \ldots$, Έστω $X_1, X_2, \ldots$ οι ενδιάμεσοι χρόνοι γεγονότων, με $X_i \sim Exp(\lambda)$ ανεξ.

Τότε $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$, N = # αυτοκ. που θα περάσουν πριν αρχίσω τη διάσχιση.

Έχουμε: $P(N=0) = P(X_1 > t_0) = e^{-\lambda t_0}$

$$P(N=1) = P(X_1 \le t_0, X_2 > t_0) = P(X_1 \le t_0) \cdot P(X_2 > t_0) = (1 - e^{-\lambda t_0}) e^{-\lambda t_0}$$

$$\vdots$$

$$P(N=n) = P(X_1 \le t_0, \ldots, X_n \le t_0, X_{n+1} > t_0) = (1 - e^{-\lambda t_0})^n \cdot e^{-\lambda t_0}$$

Έχουμε: $E(X) = E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N=n\right]$

και $E\left[\sum_{i=1}^{\cancel{N}\, n} X_i \mid N=n\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid N=n] =$

$$= \sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid X_1 \le t_0, \ldots, X_n \le t_0, X_{n+1} > t_0] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid X_i \le t_0] \overset{X_i \text{ ισον.}}{=\!=} nE[X_1 \mid X_1 \le t_0]$$

Έχω $E[X_1 \mid X_1 \le t_0] = \dfrac{E[X_1 \cdot 1\{X_1 \le t_0\}]}{P(X_1 \le t_0)} = \dfrac{\int_0^{\infty} x \cdot 1\{x \le t_0\} \overbrace{\lambda e^{-\lambda x}}^{f_{X_1}(x)} dx}{P(X_1 \le t_0)} =$

$$= \frac{\int_0^{t_0} x \lambda e^{-\lambda x} dx}{P(X_1 \le t_0)} = \frac{\frac{1}{\lambda} \int_0^{t_0} \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx}{P(X_1 \le t_0)} = \frac{\frac{1}{\lambda} P(S_2 \le t_0)}{P(X_1 \le t_0)}$$

Gamma $(2, \lambda)$

$$= \frac{\frac{1}{\lambda} P(N(t_0) \ge 2)}{P(X_1 \le t_0)} = \frac{\frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0})}{1 - e^{-\lambda t_0}}$$

Άρα $E(X)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-e^{-\lambda t_0})^{n-1} e^{-\lambda t_0}\cdot n\cdot \frac{1}{\lambda}\,\frac{1-e^{-\lambda t_0}-\lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\cancel{(1-e^{-\lambda t_0})}} =$

$$= \frac{1-e^{-\lambda t_0}-\lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(1-e^{-\lambda t_0})^{n-1} e^{-\lambda t_0}\, n}_{\text{μέση τιμή γεωμετρικής}} = \frac{1-e^{-\lambda t_0}-\lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda}\,\frac{1}{e^{-\lambda t_0}} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda t_0}-1}{\lambda} - t_0$$

Αν δεν θυμόμαστε την μέση τιμή γεωμετρικής:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1$$

$$\overset{d/dx}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x|<1$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}(1-x) = \frac{1}{1-x} \xRightarrow{x=1-e^{-\lambda t}} \sum_{n=1}^{\infty} n(1-e^{-\lambda t_0})^{n-1} e^{-\lambda t_0} = \frac{1}{e^{-\lambda t_0}}$$

β' τρόπος (αναδρομικός συλλογισμός)

Έστω Y ο χρόνος διέλευσης του $1^{ου}$ αυτοκινήτου από τη διάβαση

$Y \sim Exp(\lambda)$

$$E[X] = E[E[X|Y]] = \int_0^{\infty} E[X|Y=y]\underbrace{\lambda e^{-\lambda y}}_{f_Y(y)}dy$$

Όμως $E[X|Y=y] = \begin{cases} 0 & y>t_0 \\ y+E[X] & y\le t_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow E[X] = \int_0^{t_0}(y+E[X])\lambda e^{-\lambda y}dy \Rightarrow E[X] = \int_0^{t_0}\lambda y e^{-\lambda y}dy + E[X]\int_0^{t_0}\lambda e^{-\lambda y}dy$$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{(1-e^{-\lambda t_0}-\lambda t_0 e^{-\lambda t_0})}{\lambda} + E[X](1-e^{-\lambda t_0})$$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{1-e^{-\lambda t_0}-\lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda e^{-\lambda t_0}}.$$

3) Άσκηση 1

$\{N(t)\}$ δ.δ. Poisson ρυθμού λ και $S_1, S_2, \ldots$ χρόνοι γεγονότων

$E[S_1 | N(t) \geq 1] = ;$

α' τρόπος

$$E[S_1 | N(t) \geq 1] = \sum_{n=0}^{\infty} E[S_1 | N(t)=n, N(t) \geq 1] P(N(t)=n | N(t) \geq 1)$$

$$= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \overset{E[U_{1:n}] = \frac{t}{n+1}}{\overbrace{E[S_1 | N(t)=n]}} P(N(t)=n)}{P(N(t) \geq 1)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{n+1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda t}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}}{1-e^{-\lambda t}} = \frac{\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} (e^{\lambda t} - \lambda t - 1)}{1 - e^{-\lambda t}}.$$

β' τρόπος

$$\underset{1/\lambda}{\underbrace{E[S_1]}} = \underset{1-e^{-\lambda t}}{\underbrace{P(N(t) \geq 1)}} E[S_1 | N(t) \geq 1] + \underset{e^{-\lambda t}}{\underbrace{P(N(t)=0)}} \underset{t+\frac{1}{\lambda}}{\underbrace{E[S_1 | N(t)=0]}}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\lambda} - e^{-\lambda t}\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) = (1-e^{-\lambda t}) E[S_1 | N(t) \geq 1]$$

$$\Longrightarrow E[S_1 | N(t) \geq 1] = \frac{\frac{1}{\lambda} - te^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda t}} = \frac{\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} (e^{\lambda t} - \lambda t - 1)}{1-e^{-\lambda t}}.$$