9° Μάθημα 15/3/2017

Στοχαστική διαδικασία Poisson - Ασκήσεις

1) M/G/∞ ουρά

- Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ
- Χρόνοι παραμονής πελατών, ανεξ. και ισόνομες τ.μ. με κατανομή $G(x)$
- $M(t) = \#$πελατών τη χρονική στιγμή t

$P(M(t)=n) = \;;$, $E[M(t)] = \;;$

Λύση

α' τρόπος

Έστω $\{N(t)\}$ σ.δ. αφίξεων των πελατών, με χρόνους αφίξεων $S_1, S_2 \ldots$ και ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των αφίξεων $X_1, X_2, \ldots$ και έστω $Y_1, Y_2 \ldots$ ανεξ. ισόνομες $\sim G(x)$, οι χρόνοι παραμονής των πελατών, τότε έχουμε:

$M(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} 1\{S_i + Y_i > t\}$ → χρόνος αναχώρησης του i-πελάτη.

$$\Rightarrow P(M(t)=n) = P\left(\sum_{i=1}^{N(t)} 1\{S_i+Y_i>t\}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} P(N(t)=m) P\left(\sum_{i=1}^{N(t)=m} 1\{S_i+Y_i>t\} = n \mid N(t)=m\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} P(N(t)=m) \cdot P\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} 1\{U_{i:n}+Y_i>t\}}_{\overset{d}{=} \sum_{i=1}^{m} 1\{U_i+Y_i>t\}} = n \mid N(t)=m\Big) =$$

Θ. Campbell

$P(f(S_1,S_2\ldots,S_n)\in A \mid N(t)=n)$
$= P(f(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}))$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} P(N(t)=m) P\Big(\boxed{\sum_{i=1}^{m} 1\{U_i+Y_i>t\}} = n\Big) \quad *$$

$\sim Bin(m, p(t))$, I_i ανεξ.

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{με πιθ. } P(U_i+Y_i>t) \\ 0 & \text{με πιθ } P(U_i+Y_i \le t) \end{cases}$$

Οπότε: $P(U_i+Y_i>t) = \int_0^t P(U_i+Y_i>t \mid U_i=u) f_{U_i}(u)\,du =$

$$= \int_0^t P(Y_i > t-u)\cdot \frac{1}{t}\,du = \frac{1}{t}\int_0^t (1-G(t-u))\,du = p(t)$$

$$* = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^m}{m!}\binom{m}{n}[p(t)]^n[1-p(t)]^{m-n} =$$

$$= e^{-\lambda t} p(t)^n \frac{1}{n!}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^m}{m!}\frac{m!}{(m-n)!}[1-p(t)]^{m-n} \quad \underline{\underline{m-n=j}}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}p(t)^n}{n!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n+j}(1-p(t))^j}{j!} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t p(t))^n}{n!}\sum_{j=0}^{\infty}\boxed{\frac{(\lambda t(1-p(t)))^j}{j!}}$$

$\boxed{\ldots} = e^{\lambda t(1-p(t))}$

$$= e^{-\lambda t p(t)}\frac{(\lambda t p(t))^n}{n!}, \quad n=0,1,2\ldots \Rightarrow M(t)\sim Poisson(\lambda t p(t))$$

άρα $E[M(t)] = \lambda t p(t)$ κ.λ.π.

Αν μας είχε ζητηθεί μόνο η $E[M(t)]$, θα μπορούσαμε να κάνουμε τον υπολογισμό απευθείας:

$$E[M(t)] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} 1\{S_i+Y_i>t\}\right] = \sum_{m=0}^{\infty} P(N(t)=m)\, E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} 1\{S_i+Y_i>t \mid N(t)=m\}\right]$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} P(N(t)=m)\, E\left[\sum_{i=1}^{m} 1\{U_{i:m}+Y_i>t\}\right] = \sum_{m=0}^{\infty} P(N(t)=m) \cdot \sum_{i=1}^{m} P(U_{i:m}+Y_i>t) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} P(N(t)=m) \underbrace{\sum_{i=1}^{m} P(U_i+Y_i>t)}_{p(t)} = E[N(t)] \cdot p(t) = \lambda t p(t)$$

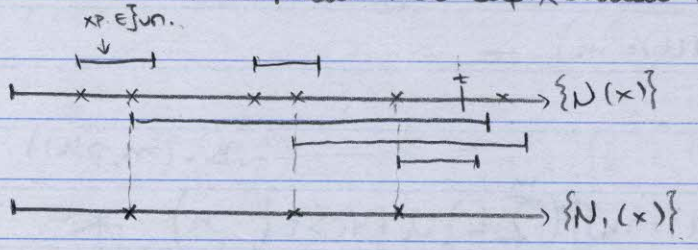
Β' τρόπος.

"Με χρήση του θεωρήματος μη-ομογενούς διάσπασης: Έστω $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ, κάθε γεγονός που συμβαίνει τη στιγμή x καταγράφεται με $p(x)$ και $\{N_1(t)\}$ η διαδικασία των καταγεγραμμένων γεγονότων τότε $\{N_1(t)\}$ είναι μη-ομογ. Poisson ρυθμού $\lambda p(x)$"

Έστω $\{N(x)\}$ η σ.δ. αφίξεων (ομογενούς Poisson ρυθμού λ) και t συγκεκρ. χρονική στιγμή. Ένας πελάτης που φτάνει σύμφωνα με τη $\{N(x)\}$ "καταγράφεται" αν είναι παρών τη στιγμή t.

Άρα $N_1(x) = \#$ καταγεγραμμένων πελατών μέχρι τη στιγμή t.

$= \#$ πελατών που αφίχθηκαν στο $[0,x]$ και είναι παρόντες τη στιγμή t:



$$p(x) = \begin{cases} P(x+Y>t), & x \le t \\ 0, & x>t \end{cases} = \begin{cases} 1-G(t-x), & x \le t \\ 0, & x>t \end{cases}$$

από θ. μη-ομογ. διάσπασης $\{N_1(t)\}$ Poisson με ρυθμό $\lambda p(x)$.

$M(t) = N_1(t) \sim Poisson\left(\int_0^t \lambda p(x)dx\right)$

Άρα $M(t) \sim Poisson\left(\lambda \int_0^t (1-G(t-x))dx\right)$

2) Άσκηση 1

$\{N(t)\}$ μη-ομογενής σ.δ. Poisson ρυθμού $\lambda(t)$

$S_n \overset{d}{=} ;\ , (S_1 | N(t)=1) \overset{d}{=} ;$

Λύση

$$F_{S_n}(t) = P(S_n \le t) = P(N(t) \ge n) \quad , \text{Όμως } N(t) \sim \text{Poisson}\Big(\underbrace{\int_0^t \lambda(x)dx}_{\Lambda(t)}\Big)$$

άρα $F_{S_n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^k}{k!}$

και $$f_{S_n}(t) = F_{S_n}'(t) = \sum_{k=n}^{\infty}\left(-\lambda(t) e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^k}{k!}\right) + \sum_{k=n}^{\infty}\left(e^{-\Lambda(t)} \frac{\cancel{k}(\Lambda(t))^{\overbrace{k-1}^{=j}} \cdot \lambda(t)}{\cancel{k}(k-1)!}\right) =$$

$$= -\sum_{k=n}^{\infty} \lambda(t) e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^k}{k!} + \sum_{j=n-1}^{\infty} \lambda(t) e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^j}{j!} =$$

$$= \lambda(t) e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^{n-1}}{(n-1)!}$$

Όταν $\lambda(t) = \lambda$ παίρνω την σ.π.π της Erlang(n,λ)

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}, \ t > 0.$$

$F_{S_1|N(t)=1}(x) = P(S_1 \le x | N(t)=1)$ και είναι $F_{S_1|N(t)=1} = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ ? & 0 < x < t \\ 1 & x \ge t \end{cases}$

Για $0 < x < t$ έχουμε:

$$F_{S_1|N(t)=1}(x) = P(N(x) \ge 1 | N(t)=1) = P(N(x)=1 | N(t)=1) =$$

$$= \frac{P(N(x)=1, N(t)=1)}{P(N(t)=1)} = \frac{P(N(x)=1, N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)} \overset{\text{ανεξ. προσαυξ.}}{=}$$

$$= \frac{P(N(x)=1) P(N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)} = \frac{e^{-\Lambda(x)} \frac{\Lambda(x)^1}{1!} \cdot e^{-(\Lambda(t)-\Lambda(x))} \cdot \frac{(\Lambda(t)-\Lambda(x))^0}{0!}}{e^{-\Lambda(t)} \frac{\Lambda(t)^1}{1!}}$$

$$= \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(t)}$$

Τελικά: $F_{S_1|N(t)=1}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(t)} & 0 < x < t \\ 1 & x \ge t \end{cases}$

Στην ομογενή έχουμε:

$$F_{S_1|N(t)=1}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{t} & 0 < x < t \\ 1 & x \ge t \end{cases} \Rightarrow (S_1 | N(t)=1) \sim \text{Uniform}([0,t])$$

3) Άσκηση 2.

Έστω $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ και $t<s$ θέλω να βρω $Cov(N(t),N(s))$

α' τρόπος

$$Cov(N(t),N(s)) = E[N(t)N(s)] - \underbrace{E[N(t)]}_{\lambda t}\underbrace{E[N(s)]}_{\lambda s}$$

$$= E[N(t)(N(t)+(N(s)-N(t)))] - \lambda^2 ts =$$

$$= E[N(t)^2] + E[N(t)(N(s)-N(t))] - \lambda^2 ts \ \overset{\text{ανεξ.}}{\underset{\text{προσ.}}{=}}$$

$$= E[N(t)^2] + \underbrace{E[N(t)]}_{\lambda t}\underbrace{E[N(s)-N(t)]}_{\lambda(s-t)} - \lambda^2 st =$$

$$\overset{*}{=} Var[N(t)] + E[N(t)]^2 + \lambda^2 t(s-t) - \lambda^2 ts$$

$$= \lambda t + \lambda^2 t^2 - \lambda^2 t^2 + \lambda^2 st - \lambda^2 ts = \lambda t$$

$\circledast$ $Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$

β' τρόπος

Με ιδιότητες συνδιακύμανσης:

$$Cov(N(t),N(s)) = Cov(N(t), N(t)+(N(s)-N(t))) =$$

$$= Cov(N(t),N(t)) + \underbrace{Cov(N(t), N(s)-N(t))}_{0} \quad \text{λόγω ανεξ. προσαυξ.}$$

$$= Var[N(t)] = \lambda t$$

Για $s<t$, $Cov(N(t),N(s)) = \lambda s$

άρα γενικά $Cov(N(t),N(s)) = \lambda \cdot \min(t,s)$