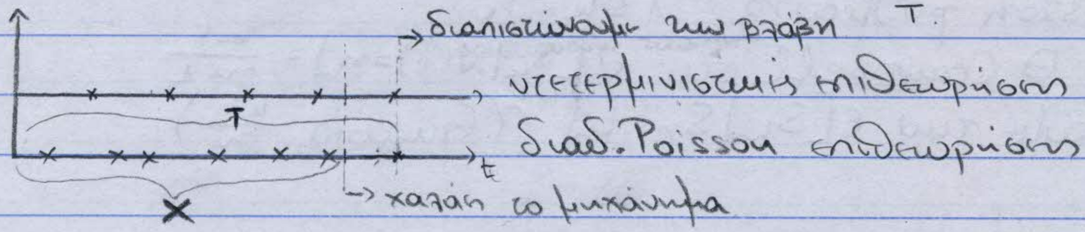
10° Μάθημα 17/3/2017

Στοχαστική Διαδικασία Poisson - Ασκήσεις

1) Άσκηση

- Μηχάνημα με $Exp(\lambda)$ χρόνο ζωής
- Επιθεωρήσεις γίνονται κατά μέσο όρο κάθε t_0 χρονικές μονάδες.
- Είναι καλύτερο η διαδικασία των επιθεωρήσεων να είναι Poisson (με ενδιάμεσους χρόνους $Exp(\frac{1}{t_0})$) ή ντετερμινιστική (με σταθ. ενδιάμεσους χρόνους t_0);
- Συγκεκριμένα μας ενδιαφέρει η $E[\underbrace{\text{χρόνος μέχρι τη διαπίστωση βλάβης}}_{T}]$



Λύση

α' περίπτωση: Poisson διαδικασία επιθεωρήσεων

$E[T]=E[X]+E[Z]$, όπου X ο χρόνος ζωής του μηχανήματος και Z ο υπολειπόμενος χρόνος ως την επόμενη επιθεώρηση τη στιγμή που χάλασε το μηχάνημα $\sim Exp(\frac{1}{t_0})$ (λόγω αμνήμονης)

β' περίπτωση: Ντετερμινιστική διαδικασία επιθεωρήσεων

$T=\left(\lfloor \frac{X}{t_0} \rfloor + 1\right)t_0$

$$\Rightarrow E[T]=E\left[\left(\lfloor \tfrac{X}{t_0}\rfloor+1\right)t_0\right]=\int_0^\infty E\left[\left(\lfloor \tfrac{X}{t_0}\rfloor+1\right)t_0 \,\middle|\, X=x\right]\overbrace{\lambda e^{-\lambda x}}^{f_X(x)}dx=$$

$$=t_0\int_0^\infty\left(\lfloor \tfrac{x}{t_0}\rfloor+1\right)\lambda e^{-\lambda x}dx=t_0\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)t_0}^{nt_0}\left(\lfloor \tfrac{x}{t_0}\rfloor+1\right)\lambda e^{-\lambda x}dx=$$

$$=t_0\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)t_0}^{nt_0}n\lambda e^{-\lambda x}dx=t_0\sum_{n=1}^{\infty}n\left[-e^{-\lambda x}\right]_{(n-1)t_0}^{nt_0}=$$

$$=t_0\sum_{n=1}^{\infty}n\left(e^{-\lambda(n-1)t_0}-e^{-\lambda n t_0}\right)=t_0\sum_{n=1}^{\infty}n e^{-\lambda n t_0}\left(e^{\lambda t_0}-1\right)=$$

$$=t_0\left(e^{\lambda t_0}-1\right)\sum_{n=1}^{\infty}n\left(e^{-\lambda t_0}\right)^n=t_0\left(e^{\lambda t_0}-1\right)\frac{e^{-\lambda t_0}}{(1-e^{-\lambda t_0})^2}=\frac{t_0}{1-e^{-\lambda t_0}}$$

Παράγωγος γεωμετρικής σειράς με λόγο $e^{-\lambda t_0}$.

Επομένως: Poisson $\longrightarrow E[T_1] = \frac{1}{\lambda} + t_0$

Ντετερμ. $\longrightarrow E[T_2] = \frac{t_0}{1-e^{-\lambda t_0}}$

Έχω: $E[T_1] - E[T_2] = \frac{1}{\lambda} + t_0 - \frac{t_0}{1-e^{-\lambda t_0}} = \frac{1-e^{-\lambda t_0} + \lambda t_0(1-e^{-\lambda t_0}) - \lambda t_0}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})} =$

$$= \frac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})} > 0$$

Για τον αριθμητή ισχύει ότι είναι ίσος με $P(N\geq 2)$, $N \sim Poisson(\lambda t_0)$

2) Άσκηση

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ, $1 \leq k < n$

Γνωρίζουμε από Θ. Campbell ότι: $E[S_k | N(t)=n] = \frac{kt}{n+1}$

Θέλουμε να βρούμε την $E[S_k | S_n = t]$ (Εικασία $\frac{kt}{n}$).

Λύση

α' τρόπος

$E[S_k | S_n = t] = \lim_{h\to 0^+} E[S_k | N(t-h) = n-1, N(t)=n] =$

$$= \lim_{h\to 0^+} E[S_k | N(t-h) = n-1] = \lim_{h\to 0^+} \frac{k(t-h)}{n-1+1} = \frac{kt}{n}$$

β' τρόπος

$E[S_k | S_n = t] = \int_0^\infty x f_{S_k|S_n=t}(x)\,dx = \int_0^t x \frac{f_{S_k,S_n}(x,t)}{f_{S_n}(t)}\,dx =$

$$= \frac{\int_0^t x \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}(t-x)^{n-k-1} e^{-\lambda(t-x)}\,dx}{\frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \int_0^t \frac{x^k}{t^{n-1}}(t-x)^{n-k-1}\,dx \overset{u=\frac{x}{t}}{=\!=} \frac{(n-1)!\,t}{(k-1)!(n-k-1)!} \underbrace{\int_0^1 u^k (1-u)^{n-k-1}\,du}_{B(k+1,n-k) = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k)}{\Gamma(n+1)}} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,t}{(k-1)!(n-k-1)!} \frac{k!(n-k-1)!}{n!} = \frac{kt}{n}$$

3) Άσκηση 1, Φυλλάδιο 1

n βιβλία αριθμημένα : $1,2,\dots,n$

$P(\text{λάθη στο βιβλίο } k = i) = \frac{k^i}{(k+1)^{i+1}}$ $\quad k=1,2,\dots,n\ ,\ i=0,1,2\dots$

Πείραμα τύχης: επιλογή βιβλίου, διαβάζει (βρίσκει τυπογραφικά)

$X = \#$ τυπογραφικών λαθών, $E(X) = ;$, $Var(X) = ;$

Λύση

Έστω Z το βιβλίο που επέλεξε, τότε:

$E[X] = \sum_{k=1}^{n} P(Z=k) E[X|Z=k]$, έχω $P(Z=k) = \frac{1}{n}$, $k=1,2,\dots,n$.

και $E[X|Z=k] = \sum_{i=0}^{\infty} i P(X=i|Z=k) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{\infty} i\left(\frac{k}{k+1}\right)^{i}$ $\underbrace{\qquad}_{\text{παράγωγος γεωμ. σειράς}}$

$= \frac{1}{k+1}\frac{\frac{1}{k+1}}{\left(\frac{1}{k+1}\right)^2} = k$

Άρα $E[X] = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}k = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$.

Για το $Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$

Ομοίως βρίσκουμε $E[X^2] = \sum_{k=1}^{n} P(Z=k) E[X^2|Z=k]$ κλπ

4) Άσκηση 2, Φυλλάδιο 1

Κάλπη με a λευκά ($Λ$) και b μαύρα ($Μ$) σφαιρίδια. Τραβάμε σφαιρίδιο
- → αν είναι $Λ$ το επανατοποθετούμε
- → αν είναι $Μ$ το αντικαθιστούμε με $Λ$.

Έστω $X_n = \#$ λευκών σφαιριδίων μετά τη n-οστή επανάληψη.

a) ν.δ.ο. $E[X_{n+1}] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)E[X_n] + 1$

β) $E[X_n] = ;$

Λύση

a) $E[X_{n+1}] = \sum_x P(X_n = x) E[X_{n+1}|X_n = x]$

Όμως $E[X_{n+1}|X_n=x] = \underbrace{\frac{x}{a+b}}_{\text{πιθ. Λ στην } n+1 \text{ επανάληψη}} \cdot x + \underbrace{\left(1-\frac{x}{a+b}\right)}_{\text{πιθ. Μ στην } n+1 \text{ επανάληψη.}}(x+1) =$

$= x+1-\frac{x}{a+b} = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)x + 1.$

Άρα $E[X_{n+1}] = \sum_x \underbrace{P(X_n = x)}_{f_{X_n}(x)} \Big(\underbrace{\left(1-\frac{1}{a+b}\right)x + 1}_{g(x)} \Big) = E\left[\left(1-\frac{1}{a+b}\right)X_n + 1\right] =$

$= \left(1-\frac{1}{a+b}\right)E[X_n] + 1.$

β) $E[X_n] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)E[X_{n-1}] + 1 = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^2 E[X_{n-2}] + \left(1-\frac{1}{a+b}\right) + 1 =$

$= \dots = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n \underset{\overset{\shortparallel}{a}}{E[X_0]} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^k = \dots$

Εναλλακτικά:

$E[X_{n+1}] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)E[X_n] + 1 \longleftarrow$ Μικτή πρόοδος.

Λύνω την εξίσωση σταθερού σημείου: $x = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = a+b.$

Αφαιρώντας: $E[X_{n+1}] - x = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)\left(E[X_n] - x\right)$

άρα $E[X_n] - x$ είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda = 1 - \frac{1}{a+b}$

οπότε:

$E[X_n] - x = \left(E[X_0] - x\right)\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n \Longrightarrow$

$\Longrightarrow E[X_n] = a+b - b\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n.$