11° Μάθημα 22/3/17.

Ασκήσεις

1) Άσκηση 3 / Φυλλάδιο 1

Ρίψη νομίσματος $\begin{cases} \xrightarrow{\text{πιθ } p} K \\ \xrightarrow[1-p]{\text{πιθ}} \Gamma \end{cases}$ $\qquad \epsilon[\underbrace{\#\text{ρίψεων μέχρι } r \text{ συνεχόμ. } K}_{Y_r}] = ;$

α΄ τρόπος

Δέσμευση στην 1η ρίψη X_1

$$\epsilon[Y_r] = (1-p)(1+\epsilon[Y_r]) + p\,\epsilon[Y_r | X_1 = K] =$$

$$= (1-p) + (1-p)\epsilon[Y_r] + p(1-p)(2+\epsilon[Y_r]) + p^2\epsilon[Y_r | X_1 = K, X_2 = K]$$

$$= (1-p) + 2p(1-p) + [(1-p)+p(1-p)]\epsilon[Y_r] + p^2(1-p)(3+\epsilon[Y_r]) + p^3\epsilon[Y_r | X_1 = K, X_2 = K, X_3 = K]$$

$$= (1-p) + 2p(1-p) + 3p^2(1-p) + [(1-p)+p(1-p)+p^2(1-p)]\epsilon[Y_r] +$$

$$+ p^3\epsilon[Y_r | X_1 = K, X_2 = K, X_3 = K] = \ldots \text{ (r φορές η ίδια διαδικασία)}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} i(1-p)p^{i-1} + \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{r}(1-p)p^{i-1}}_{1-p^r}\Big)\epsilon[Y_r] + p^r \cdot r \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow p^r\epsilon[Y_r] = \sum_{i=1}^{r} i(1-p)p^{i-1} + p^r \cdot r \Longrightarrow \ldots$$

↓ παράγωγος γεωμ. σειράς

β΄ τρόπος

Δέσμευση στον αριθμό ρίψεων για να εμφανιστούν 1η φορά Γράμματα.

Έστω X τέτοι

$$\epsilon[Y_r] = \sum_{i=1}^{\infty} P(X=i)\epsilon[Y_r | X=i] \quad , \text{ έχω } P(X=i) = p^{i-1}(1-p) \quad , i \geq 1.$$

και $$\epsilon[Y_r | X=i] = \begin{cases} i + \epsilon[Y_r] & i \leq r \\ r & i > r \end{cases}$$ άρα

$$\epsilon[Y_r] = \sum_{i=1}^{r} p^{i-1}(1-p)(i+\epsilon[Y_r]) + \sum_{i=r+1}^{\infty} p^i(1-p)r =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} i(1-p) + (1-p^r)\epsilon[Y_r] + rp^r \ldots$$ κτλ όπως στον α΄ τρόπο

γ' τρόπος

Με δέσμευση στην Y_{r-1}

$$E[Y_r] = \sum_{i=r-1}^{\infty} P(Y_{r-1}=i)E[Y_r|Y_{r-1}=i]$$

και $E[Y_r|Y_{r-1}=i] = p(i+1)+(1-p)\left[(1+i)E[Y_r]\right] = 1+i+(1-p)E[Y_r]$

$$\Rightarrow E[Y_r] = \boxed{\sum_i P(Y_{r-1}=i)(i+1)}^{=E[Y_{r-1}]+1} + (1-p)E[Y_r]\boxed{\sum_i P(Y_{r-1}=i)}^{=1}$$

$$\Rightarrow E[Y_r] = E[Y_{r-1}]+1+(1-p)E[Y_r] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow pE[Y_r] = E[Y_{r-1}]+1 \Rightarrow E[Y_r] = \frac{1}{p}E[Y_{r-1}]+\frac{1}{p}.$$

Έχω μικτή πρόοδο, λύνω την εξίσωση σταθερού σημείου

$$E[X_r] = \frac{1}{p}E[X_{r-1}]+\frac{1}{p} = \frac{1}{p}x+\frac{1}{p} \Rightarrow x = \frac{1/p}{1-1/p} = \frac{1}{p-1}.$$

$$\Rightarrow E[X_r]-x = \frac{1}{p}(E[X_{r-1}]-x) \Rightarrow E[X_r]-x = \left(\frac{1}{p}\right)^{r-1}(E[X_1]-x)$$

$$\Rightarrow E[X_r] = \frac{1}{p-1}+\left(\frac{1}{p}\right)^{r-1}\Big(\underbrace{E[X_1]}_{1/p}-\frac{1}{p-1}\Big)$$

2) Άσκηση 4/Φυλλάδιο 1

$X \geq 0$ ακέραια με πιθανογεννήτρια $P_X(z) = \frac{c}{6-z-z^2}$

$c=;$, $E[X]=;$, $f_X(x)=;$, $P(X=\text{άρτιος})=;$

Λύση

Έχουμε $P_X(1)=1 \Rightarrow c=4$

και $E[X]=P_X'(1)=\dots$

Παραγοντοποιώ τον παρονομαστή: $-(z^2+z-6) = -(z+3)(z-2)$

$$\Rightarrow P_X(z) = \frac{4}{(3+z)(2-z)} = \frac{A}{3+z}+\frac{B}{2-z} = \frac{A(2-z)+B(3+z)}{(3+z)(2-z)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 4 &= 2A+3B \\ 0 &= B-A \end{aligned}\right\} \Rightarrow A=B=\frac{4}{5}$$

Επομένως $P_X(z) = \frac{4}{15}\frac{1}{1-(-\frac{z}{3})}+\frac{2}{5}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_X(z) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X=x)z^x = \sum_{x=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{4}{15}\left(-\frac{1}{3}\right)^x+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)}_{P(X=x)=f_X(x)} z^x$$

$$P_X(1) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X=x)$$
$$P_X(-1) = \sum_{x=0}^{\infty} (-1)^x P(X=x) \quad \oplus$$

$$P_X(1) + P_X(-1) = 2 \sum_{x \text{ άρτιος}} P(X=x) \Rightarrow P(X = \text{άρτιος}) = \frac{P_X(1)+P_X(-1)}{2} =$$
$$= \frac{1+4/6}{2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

3) Άσκηση 5/Φυλλάδιο 1

X, Y, Z ανεξάρτητες, $X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp(\lambda)$, $Z \sim Exp(\mu)$, $\lambda \neq \mu$.
$W = X+Y+Z$, $\tilde{F}_W(s) = ;$, $f_W(w) = ;$

Λύση

$$\tilde{F}_W(s) = \tilde{F}_X(s)\cdot\tilde{F}_Y(s)\cdot\tilde{F}_Z(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2 \frac{\mu}{\mu+s} = \frac{A}{s+\lambda} + \frac{B}{(s+\lambda)^2} + \frac{\Gamma}{s+\mu} =$$
$$= \frac{A(s+\lambda)(s+\mu) + B(s+\mu) + \Gamma(s+\lambda)^2}{(s+\lambda)^2(s+\mu)} = \frac{(A+\Gamma)s^2 + [A(\lambda+\mu)+B+2\lambda\Gamma]s + (A\lambda\mu + B\mu + \Gamma\lambda^2)}{(s+\lambda)^2(s+\mu)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda^2\mu = A\lambda\mu + \mu B + \lambda^2\Gamma \\ 0 = (\lambda+\mu)A + B + 2\lambda\Gamma \\ 0 = A + \Gamma \end{cases} \Rightarrow \ldots \text{ Βρίσκω } A, B, \Gamma.$$

$$\Rightarrow \tilde{F}_W(s) = \frac{A}{\lambda}\underbrace{\frac{\lambda}{\lambda+s}}_{Exp(\lambda)} + \frac{B}{\lambda^2}\underbrace{\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2}_{Erlang(2,\lambda)} + \frac{\Gamma}{\mu}\underbrace{\frac{\mu}{\mu+s}}_{Exp(\mu)}$$

άρα η σ.π.π.

$$f_W(w) = \frac{A}{\cancel{\lambda}}\cancel{\lambda} e^{-\lambda w} + \frac{B}{\cancel{\lambda^2}}\frac{\cancel{\lambda^2}}{(2-1)!} w^{2-1} e^{-\lambda w} + \frac{\Gamma}{\cancel{\mu}}\cancel{\mu} e^{-\mu w}, \quad w>0$$
$$= A e^{-\lambda w} + B w e^{-\lambda w} + \Gamma e^{-\mu w}$$

4) Άσκηση 6/Φυλλάδιο 1

Χρόνοι ζωής $Exp(\lambda)$, $Gamma(n,\mu)$ ανεξ. και T = χρόνος ζωής συστ.
$E[T] = ;$

Λύση

$T = \min(X, Y_n)$, $X \sim Exp(\lambda)$, $Y_n \sim Gamma(n, \mu)$

$$\left[\text{Γενικά για } X \geq 0,\ E[X] = \int_0^\infty x f_X(x)dx = \int_0^\infty \int_0^x f_X(x)dt\,dx = \int_0^\infty \int_t^\infty f_X(x)dx\,dt = \int_0^\infty (1-F_X(x))dt \right]$$

$P(N(t)<n) \overset{\text{Poisson}}{\underset{\mu t}{}}$

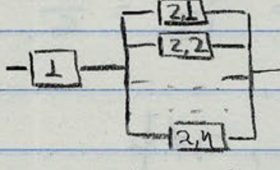
α' τρόπος

$$E[T] = \int_0^\infty (1-F_T(t))\,dt = \int_0^\infty P(T>t)\,dt = \int_0^\infty P(X>t, Y_n>t)\,dt = \int_0^\infty P(X>t)\overset{}{P(Y_n>t)}\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^i}{i!}\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mu^i}{i!}\int_0^\infty t^{(i+1)-1} e^{-(\lambda+\mu)t}\,dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mu^i}{(\lambda+\mu)^{i+1}} = \frac{1}{\lambda+\mu}\,\frac{1-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n}{1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}} = \frac{1}{\lambda}\left(1-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n\right)$$

β' τρόπος



$T = \min(X, Y_n)$

και $E[T_n] = \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot 0 + \frac{\mu}{\lambda+\mu} E[T_{n-1}]$

$\Rightarrow E[T_n] = \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} E[T_{n-1}]$ μικτή πρόοδος.

εξίσωση σταθ. σημείου: $x = \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}x \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda}$.

$$\Rightarrow E[T_n] - \frac{1}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(E[T_{n-1}] - \frac{1}{\lambda}\right) = \dots = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n \left(\underset{}{\overset{\frac{1}{\lambda+\mu}}{E[T_1]}} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow E[T_n] = \frac{1}{\lambda} - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-1}\frac{\mu}{\lambda(\lambda+\mu)} = \frac{1}{\lambda}\left(1-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n\right)$$

γ' τρόπος

$$E[T] = E[\min(X, Y_n)] = E[X] + E[\min(0, Y_n - X)] =$$

$$= \frac{1}{\lambda} + P(Y_n \geq X)\cdot 0 + P(X>Y_n)E[Y_n - X \mid X > Y_n]$$

$$= \frac{1}{\lambda} - P(X>Y_n)E[X-Y_n \mid X>Y_n]$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n \frac{1}{\lambda}.$$

5) Άσκηση 1/Φυλλάδιο 2

α' τρόπος

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ.

$E[N(t)(N(t)-1)(N(t)-2)\dots(N(t)-k+1)] = ;$

$$= \sum_{n=0,k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{(n-k)!} = e^{-\lambda t}(\lambda t)^k \sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-k}}{(n-k)!}$$ θέτω $n-k=j$

και προκύπτει: $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^j}{j!} = e^{\lambda t}$ άρα η ζητούμενη μέση τιμή είναι $(\lambda t)^k$

β' τρόπος

Πιθανογεννήτρια $N(t)$: $P_{N(t)}(z) = e^{-\lambda t(1-z)}$

και η ζητούμενη μέση τιμή είναι ίση με $P_{N(t)}^{(k)}(1)$