12° Μάθημα 24/3/17.

Ασκήσεις στην σ.δ. Poisson

1) Άσκηση 2/φυλλάδιο 2

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ, $Cov(N(t),N(s))=$;

την έχουμε κάνει (σελ 42 σημειώσεις), προκύπτει $\lambda\cdot\min(t,s)$.

2) Άσκηση 3/φυλλάδιο 2

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ, $P(N(t)=k|N(t+s)=k+m)=$;

Την έχουμε κάνει (σελ 22), έχουμε $(N(t)|N(t+s)=n)\sim Bin\left(n,\frac{t}{t+s}\right)$

άρα $P(N(t)=k|N(t+s)=k+m)=\binom{k+m}{k}\left(\frac{t}{t+s}\right)^k\left(\frac{s}{t+s}\right)^m$

3) Άσκηση 4/φυλλάδιο 2

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ, $P(N(t)$ περιττός$)=$;

Λύση

$P_{N(t)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}P(N(t)=n)z^n=e^{-\lambda t}e^{-\lambda t z}=e^{-\lambda t(1-z)}$

$P_{N(t)}(1)=\sum_{n=0}^{\infty}P(N(t)=n)$ (Παρόμοια ιδέα άσκηση 4/φυλλάδιο 1)

$P_{N(t)}(-1)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nP(N(t)=n)$ $\ominus$

$P_{N(t)}(1)-P_{N(t)}(-1)=\sum_{n\ \text{περιτ}}P(N(t)=n)=2P(N(t)_{\text{περιττός}})\Rightarrow$

$\Rightarrow P(N(t)\ \text{περιττός})=\frac{P_{N(t)}(1)-P_{N(t)}(-1)}{2}=\frac{1-e^{\lambda t}}{2}$

4) Άσκηση 5/φυλλάδιο 2

Αφίξεις πελατών σε τράπεζα σύμφωνα με σ.δ. Poisson $\{N(t)\}$, ρυθμού $\lambda=8$ πελ./ώρα.

α) $E[N(8)]=\lambda t=8\cdot 8=64$, $Var[N(8)]=8\cdot 8=64$.

β) $P(N(\frac{1}{4})=0)=e^{-\lambda t}=e^{-8\cdot\frac{1}{4}}=e^{-2}$

γ) $Cov(N(2),N(2)-N(1))=Cov(N(1)+N(2)-N(1),N(2)-N(1))=$

$=\underbrace{Cov(N(1),N(2)-N(1))}_{0\ \text{ανεξ. προσαυξ.}}+Cov(N(2)-N(1),N(2)-N(1))=Var[N(2)-N(1)]\overset{\text{στ.}}{\underset{\text{προσ.}}{=}}$

$=Var[N(1)]=\lambda\cdot t=8\cdot 1$

δ) $Cov(N(2),N(26)-N(25))=0$ λόγω ανεξ. προσαυξήσεων.

5) Άσκηση 6/Φυλλάδιο 2

$\{N_1(t)\}, \{N_2(t)\}$ ανεξ. σ.δ. Poisson ρυθμού λ_1, λ_2 αντίστοιχα.

$A_i = \#$ γεγονότων στην $\{N_i(t)\}$ ως το 1ο γεγονός στην άλλη διαδικασία.

α) $P(A_i = n) = ;\quad i=1,2.$

β) A_1, A_2 ανεξ.

Λύση

α) $\{N(t)\}$ η υπέρθεση τους και

$$P(A_i=n)=P\begin{pmatrix}\text{τα πρώτα } n \text{ γεγονότα είναι } i\\ \text{και το } n+1 \text{ του άλλου είναι}\end{pmatrix}=\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^n\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2}\right)\quad i=1,2 \text{ και } n=0,1,2\ldots$$

β) Αν $A_1>0 \Longrightarrow A_2=0$

οπότε $P(A_1=3, A_2=2)=0 \neq P(A_1=3)\cdot P(A_2=2)\neq 0.$

άρα δεν είναι ανεξ.

6) Άσκηση 1/Φυλλάδιο 3

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ και $S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι των γεγονότων

$S_{N(t)}$ ο χρόνος του τελευταίου γεγονότος πριν τη στιγμή t, $E[S_{N(t)}]=;$

Λύση

$$E[S_{N(t)}]=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{P(N(t)=n)}_{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}\underbrace{E[S_{N(t)}\mid N(t)=n]}_{E[U_{n:n}] \text{ από Θ. Campbell}}{}^{*}$$

και $U_{i:n}$ η i-οστή από τ.δ. $U([0,t])$

$$*=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\frac{nt}{n+1}=\frac{te^{-\lambda t}}{\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{n+1}\cdot n\overset{n+1=j}{=\!=}\frac{1}{\lambda}\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}(j-1)}=$$

Μέση τιμή Poisson

αθροίσματα της σ.π. της Poisson

εκτός 1ου όρου.

$$=\frac{1}{\lambda}\left(E[N(t)]-(1-e^{-\lambda t})\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left(\lambda t-(1-e^{-\lambda t})\right)=t-\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}$$

β' τρόπος

$$E[S_{N(t)}]=\int_0^{\infty}(1-F_{S_{N(t)}}(x))\,dx=\int_0^{\infty}P(S_{N(t)}>x)\,dx=\int_0^{\infty}P(N(x)<N(t))\,dx=$$

$$=\int_0^t P\begin{bmatrix}\text{τουλ. 1 γεγονός}\\ \text{στο } (x,t]\end{bmatrix}dx=\int_0^t(1-e^{-\lambda(t-x)})\,dx=t-\int_0^t e^{-\lambda(t-x)}\,dx=$$

$$=t-\int_0^t e^{-\lambda u}\,du=t-\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}.$$

7) Άσκηση 2/Φυλλάδιο 3.

Έστω $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ, S_1 ο χρόνος του 1ου γεγονότος

$E[S_1\mid N(t)\geq 1]=;$ την έχουμε κάνει (σελ 37 σημειώσεις).

8) Άσκηση 3/Φυλλάδιο 3.

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ και $S_1, S_2, \dots$ οι χρόνοι των γεγονότων

$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i\right] = ;$

Λύση

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P(N(t)=n)}_{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}} \underbrace{E\left[\sum_{i=1}^{\cancel{N(t)}\, n} S_i \mid N(t)=n\right]}_{E\left[\sum_{i=1}^{n} U_{i:n}\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} U_i\right] = \frac{nt}{2}} \; *$$

$$* = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\, \frac{nt}{2} = \frac{t}{2} E[N(t)] = \frac{\lambda t^2}{2}.$$

9) Άσκηση 4/Φυλλάδιο 3

Έχουμε κάνει πιο γενική στη θεωρία (M/G/∞ ουρά).

10) Άσκηση 1/Φυλλάδιο 4

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ $\xrightarrow{1/3}$ τύπου 1 $\{N_1(t)\}$, $\xrightarrow{2/3}$ τύπου 2 $\{N_2(t)\}$ αντ.

$P(N_1(3)=5, N(3)=11 \mid N_2(1)=4)^{*} = ;$

Λύση

$$* = P(N_1(3)=5, N_2(3)=6 \mid N_2(1)=4) = P(N_1(3)=5)\cdot P(N_2(3)=6 \mid N_2(1)=4) =$$

$$= P(N_1(3)=5)\cdot P(\underbrace{N_2(3)-N_2(1)=2}_{N_2(2)=2} \mid \cancel{N_2(1)=4}) = e^{-3\frac{\lambda}{3}}\cdot \frac{\lambda^5}{5!}\cdot e^{-2\cdot\frac{2\lambda}{3}} \frac{\left(\frac{4\lambda}{3}\right)^2}{2!}$$

11) Άσκηση 2/Φυλλάδιο 4.

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ.

$\xrightarrow{p}$ τύπου 1, $\xrightarrow{q}$ τύπου 2 $\qquad p, q > 0, \; p+q=1.$

$\Pi_1 = P$[από τα πρώτα $n+k$ γεγονότα της $\{N(t)\}$ τα πρώτα n να είναι τύπου 1 και τα επόμενα k, τύπου 2]

$\Pi_2 = P$[από τα πρώτα $n+k$ γεγονότα της $\{N(t)\}$ να έχω n τύπου 1, k τύπου 2]

Λύση

Κάθε γεγονός είναι τύπου 1 ή τύπου 2 με πιθανότητες p, q αντ.

άρα $\Pi_1 = P(\underbrace{11\dots1}_{n}\underbrace{22\dots2}_{k}) = p^n q^k$

και $\Pi_2 = P(n\text{"1"}, k\text{"2"}) = \binom{n+k}{n} p^n q^k.$

12) Άσκηση 3 | Φυλλάδιο 4

$\{N_1(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού 3 και $\{N_2(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού 2. ανεξ. και $\{N(t)\}$ η υπέρθεση τους.

Ψάχνω $E[N_1(t) \mid N(t)=10]$

Λύση

α' τρόπος

$$P(N_1(t)=k \mid N(t)=10) = \frac{P(N_1(t)=k, N_2(t)=10-k)}{P(N(t)=10)} = \frac{\cancel{e^{-3t}}\frac{(3t)^k}{k!} \cdot \cancel{e^{-2t}}\frac{(2t)^{10-k}}{(10-k)!}}{\cancel{e^{-5t}}\frac{(5t)^{10}}{10!}} =$$

$$= \binom{10}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^k\left(\frac{2}{5}\right)^{10-k}$$

Δηλαδή $(N_1(t) \mid N(t)=10) \sim Bin(10, \frac{3}{5})$

$$\Longrightarrow E[N_1(t) \mid N(t)=10] = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6$$

β' τρόπος

$$N_1(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} I_i \quad \text{όπου} \quad I_i = \begin{cases} 1 & \text{αν i-οστό γεγονός τύπου 1} \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

$$E[N_1(t) \mid N(t)=10] = E\left[\sum_{i=1}^{10} I_i \mid N(t)=10\right] = \sum_{i=1}^{10} E[I_i] = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6.$$

13) Άσκηση 4 | Φυλλάδιο 4

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ. $\xrightarrow{p} \{N_1(t)\}$, $\xrightarrow{1-p} \{N_2(t)\}$ ανεξ.

T_1 = χρόνος $1^{ου}$ γεγονότος για την $\{N_1(t)\}$

T_2 = -"- -"- -"- $\{N_2(t)\}$

Να υπολογιστεί η από κοινού σ.κ. των T_1, T_2

$F_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = ;$

Λύση

$$F_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = P(T_1 \le t, T_2 \le t) \overset{\text{ανεξ.}}{=\!=} P(T_1 \le t)P(T_2 \le t) =$$

$$= (1-e^{-\lambda p t_1})(1-e^{-\lambda(1-p)t_2})$$

13ο Μάθημα. 29/3/17.

Στοχαστική Διαδικασία Poisson-Ασκήσεις

1) Άσκηση 5/Φυλλάδιο 4

Ηλεκτρικές διαταραχές τύπου i συμβαίνουν σύμφωνα με σ.δ. Poisson λ_i $i=1,2,\dots,k$. Μια ηλεκτρική διαταραχή προκαλεί βλάβη με πιθανότητα p_i

T: χρόνος ζωής

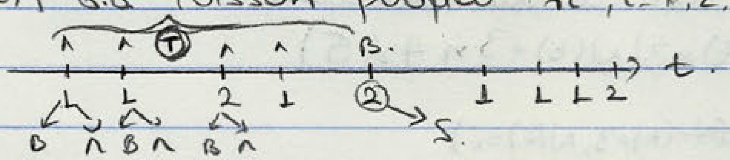
S: τύπος διαταραχής που προκαλεί τη βλάβη.

$P(T>t, S=i)$

Λύση

$N_i(t)=$ # ηλ. διαταραχών τύπου i στο $(0,t]$, $i=1,2,\dots,k$

$\{N_i(t)\}$ σ.δ Poisson ρυθμού λ_i, $i=1,2,\dots,k$



$N_{iB}(t)=$ # ηλ. διαταραχών τύπου i που προκαλούν βλάβη στο $(0,t]$

$\{N_{iB}(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού $\lambda_i p_i$, $i=1,2,\dots,k$

Αν $N_B(t)=\sum_{i=1}^{k} N_{iB}(t)=$ # διαταραχών που προκαλούν βλάβη στο $(0,t]$

$\{N_B(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού $\sum_{j=1}^{k}\lambda_j p_j$

$T=$ χρόνος 1ου γεγονότος της $\{N_B(t)\}$

$S=$ τύπος 1ου γεγονότος της $\{N_B(t)\}$

Γνωρίζουμε από θεωρία υπέρθεσης σ.δ. Poisson ότι ο χρόνος και ο τύπος είναι ανεξάρτητα άρα.

$$P(T>t, S=i)=P(T>t)P(S=i)=e^{-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j p_j t}\,\frac{\lambda_i p_i}{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j p_j}$$

2) Άσκηση 6/Φυλλάδιο 4.

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ. Κάθε γεγονός καταγράφεται με πιθ. $\frac{1}{3}$ ανεξ. $N_1(t)=\#$ γεγονότων καταγεγρ. της $\{N(t)\}$ στο $(0,t]$
και $N_2(t)=\#$ γεγονότων της $\{N(t)\}$ στο $(0,t]$ με δείκτη πολλαπλάσιο του 3.
($3^o, 6^o, 9^o$ κλπ)

α) Είναι η $\{N_1(t)\}$ σ.δ. Poisson; → Ναι, Θεωρ. Διάσπασης ρυθμός $\lambda \cdot \frac{1}{3}$.
" $\{N_2(t)\}$ " " ; → Όχι διότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των γεγονότων είναι ναι μεν ανεξάρτητοι αλλά ακολουθούν την Erlang $(3,\lambda)$ και όχι κάποια εκθετική.

β) $P(N_1(t)=3 \mid N_2(t)=1) = P(N_1(t)=3 \mid N(t)=3 \text{ ή } 4 \text{ ή } 5)$

$$= \frac{P(N(t)=3, N(t)\in\{3,4,5\})}{P(N(t)=3 \text{ ή } 4 \text{ ή } 5)} = \frac{\sum_{i=3}^{5} P(N_1(t)=3, N(t)=i)}{P(N(t)\in\{3,4,5\})} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^3}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^4}{4!}\binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\frac{2}{3} + e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^5}{5!}\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2}{e^{-\lambda t}\left(\frac{(\lambda t)^3}{3!}+\frac{(\lambda t)^4}{4!}+\frac{(\lambda t)^5}{5!}\right)}$$

3) Άσκηση 1/Φυλλάδιο 5

$\{N(t)\}$ μη ομογενής σ.δ. Poisson $\lambda(t)$

$P(S_1 \le x \mid N(t)=1) = P(N(x)\ge 1 \mid N(t)=1)$ την έχουμε κάνει (σελ 41 σημειώσεις).

$$= \begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(t)} & 0<x<t \\ 1 & x\ge t \end{cases} \quad \text{όπου } \Lambda(t)=\int_0^t \lambda(u)\,du.$$

4) Άσκηση 2 | Φυλλάδιο 5

$\{N(t)\}$ μη ομογενής σ.δ. Poisson $\lambda(t)=\lambda t,\ t\geq 0$

S_1 = χρόνος 1ου γεγονότος και ζητώ $E[N(t)]$ και $E[S_1]$

Λύση

$N(t)\sim \text{Poisson}(\Lambda(t))$ με $\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(u)\,du=\frac{\lambda t^2}{2}$

$E[N(t)]=\Lambda(t)=\frac{\lambda t^2}{2}$

$E[S_1]=\int_0^\infty P(S_1>t)\,dt=\int_0^\infty P(N(t)=0)\,dt=\int_0^\infty e^{-\Lambda(t)}\,dt=\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda t^2}{2}}\,dt$ *

$\left(\begin{array}{l}\text{Αν } X\sim N(0,1)\\ f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ άρα } \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\end{array}\right)$

* για $\sqrt{\lambda}\,t=u$ έχω $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}\,du=\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}$

5) Άσκηση 3 | Φυλλάδιο 5

$\{N(t)\}$ μη ομογενής σ.δ. Poisson με $\lambda(t)=\begin{cases}\lambda, & t\in[0,1]\cup[2,3]\cup[4,5]\cup\ldots\\ 0, & t\in(1,2)\cup(3,4)\cup\ldots\end{cases}$

S_1 = χρόνος 1ου γεγονότος

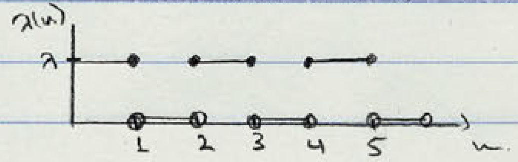
α) $P(S_1\leq x)=;$

β) $P(N(t)=n)=;$

γ) $E[S_1|N(t)=n],\ t\in[0,2]$

Λύση

$N(t)\sim \text{Poisson}(\Lambda(t))$ όπου $\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(u)\,du=\begin{cases}\lambda\left(t-\frac{\lfloor t\rfloor}{2}\right) & \lfloor t\rfloor \text{ άρτιος}\\ \left\lfloor\frac{t+1}{2}\right\rfloor & \lfloor t\rfloor \text{ περιττός}\end{cases}$



α) Άρα $P(S_1\leq x)=P(N(x)\geq 1)=1-P(N(x)=0)=1-e^{-\Lambda(x)}$.

β) $P(N(t)=n)=e^{-\Lambda(t)}\frac{(\Lambda(t))^n}{n!},\ n=0,1,\ldots$

γ) $E[S_1|N(t)=n],\ t\in[0,2]$

Για $t\in[0,1]$, το Θ. Campbell είναι άμεσα εφαρμόσιμο αφού η $\{N(t)\}$ είναι σ.δ. Poisson στο $[0,1]$ με ρυθμό λ.

$E[S_1|N(t)=n]=E[U_{1:n}]=\frac{t}{n+1}$

ενώ για $t\in(1,2]$ εφαρμόζω το Θ. Campbell προσέχοντας ότι η $\{N(s)\}$ είναι σ.δ. Poisson ρυθμού λ στο $[0,1]$ και στο $(1,t)$ δεν συμβαίνουν γεγονότα.

$E[S_1|N(t)=n]=E[S_1|N(1)=n]=\frac{1}{n+1}$.

6) Άσκηση 4/Φυλλάδιο 5

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ, $Z_1, Z_2, \dots$ ανεξ. της $\{N(t)\}$ ακέραιες ≥ 0.

$p_j = P(Z_n = j)$, $j \geq 0$, $P_Z(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j$, $E[Z_n] = \mu_Z$, $Var[Z_n] = \sigma_Z^2$

$Z(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Z_n$ σύνθετη διαδικασία Poisson.

α) $E[Z(t)]$, $Var[Z(t)]$

β) $P_{Z(t)}(z)$

γ) $r_k(t) = P(Z(t) = k)$, $r_0 = e^{-\lambda t(1-p_0)}$, $r_k = \frac{\lambda t}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) p_{k-j} r_j$, $k \geq 1$.

Λύση

β) Έχουμε $P_{Z(t)}(z) = P_{N(t)}(P_Z(z))$

Πιθανογεννήτρια της $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$, $P_{N(t)}(z) = e^{-\lambda t(1-z)}$

$\Rightarrow P_{Z(t)}(z) = e^{-\lambda t(1-P_Z(z))}$

α) $E[Z(t)] = \frac{d}{dz}(P_{Z(t)}(z))\Big|_{z=1} = \lambda t \frac{d}{dz} P_Z(z) e^{-\lambda t(1-P_Z(z))}\Big|_{z=1} = \lambda t \mu_Z$.

$Var[Z(t)] = \dots$ ανάλογα με τη μέση τιμή.

γ). $r_0 = P_{Z(t)}(0) = e^{-\lambda t(1-P_Z(0))} = e^{-\lambda t(1-p_0)}$

$P_{Z(t)}(z) = e^{-\lambda t(1-P_Z(z))} \xRightarrow{d/dz} P'_{Z(t)}(z) = \lambda t P'_Z(z) P_{Z(t)}(z)$.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k r_k z^{k-1} = \lambda t \sum_{j=0}^{\infty} j p_j z^{j-1} \sum_{k=0}^{\infty} r_k z^k \Longrightarrow \dots$$

πολ/ζω επί z και εξισώνω τους συντελεστές στα 2 μέλη.